EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

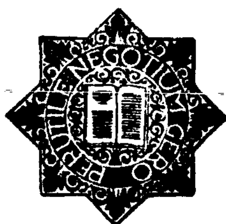
Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

11e JAARGANG 1934/35, Nr. 5.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Het leven van Archimedes. *(Vervolg)*	193—210
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De logische grondslagen der Euklidische meetkunde	211—215
Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, Antwoord aan Dr. Dijksterhuis	216—219
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Naschrift bij het antwoord . . .	220—222
Dr. S. P. SLAGTER, Een meetkundige afleiding voor het minimum van deviatie	223—225
Dr. JOH. H. WANSINK, Delen door nul.	226—238
Boekbespreking	239—240

stierf in 1564; in den toen opgemaakten catalogus van zijn bibliotheek komt echter geen Archimedes-handschrift voor. De codex A moet dus tusschen 1550 en 1564 verloren zijn geraakt of in andere handen zijn overgegaan; het is niet gelukt, er een spoor van terug te vinden.

Hiermee is natuurlijk niet gezegd, dat ook de inhoud van het kostbare document verloren was gegaan; integendeel, de codex A heeft een omvangrijke nakomelingschap gehad in den vorm van afschriften en vertalingen, die er in een tijdsverloop van meer dan twee eeuwen van zijn gemaakt en waaronder de meest betrouwbare grondslagen der moderne tekstedities voorkomen.

Een groot deel van A werd in 1269 in het Latijn overgebracht door den Vlaamschen Dominicaan Willem van Moerbeke [1]), die van 1268 tot 1280 aan het Pauselijk Hof te Viterbo bezig is geweest, verschillende Grieksche werken door vertaling toegankelijk te maken voor de geleerden van West-Europa (waaronder kennis van het Grieksch toen nog een uitzondering was) en die daardoor een belangrijk aandeel heeft gehad in de verspreiding van de Helleensche cultuur [2]). Het oorspronkelijke handschrift van deze vertaling (bij Heiberg codex B) werd in 1884 te Rome teruggevonden [3]); het bevat woordelijke overzettingen (zóó woordelijk, dat zij ook daar, waar de vertaler den tekst niet goed begrepen heeft, de waarde van een Grieksche redactie hebben) van de werken *Over Spiralen, Evenwichten van vlakke figuren, Quadratuur van de Parabool, Cirkelmeting, Over Bol en Cylinder, Over Conoiden en Sphaeroiden, Over drijvende lichamen;* daarnaast de commentaren van Eutokios (behalve die op *Cirkelmeting*), een werk van Alhazen over brandspiegels, een geschrift *De Ponderibus* en twee verhandelingen van Pto-

---

[1]) Geboren ca. 1215 te Moerbeke-lez-Grammont; hij trad in de orde van den H. Dominicus en volgde te Keulen de lessen van Albertus Magnus. Daarna verbleef hij waarschijnlijk lang in het Oosten, waar hij zich een diepgaande kennis van het Grieksch en van Oostersche talen eigen maakte. Van 1268 tot 1276 is hij kapelaan van Paus Clemens IV en zijn opvolgers, daarna aartsbisschop van Korinthe. Hij stierf vóór of in 1297. Lit. H. Bosmans S. J. *Guillaume de Moerbeke et le Traité des corps flottants d'Archimède.* Revue des Questions scientifiques, 1922. Separaat.

[2]) Door hem zijn Thomas van Aquino en andere doctores der Scholastiek in de 13e eeuw in kennis gekomen met een deel van de werken van Aristoteles.

[3]) Codex Ottobonianus Latinus 1850.

lemaios. De vertaling is gemaakt van Februari tot 10 December 1269.

De vertaling van Moerbeke bevat één werk van Archimedes dat in den codex A niet voorkomt, nl. *Over drijvende lichamen.* Dat wijst erop, dat hij bij zijn werk nog van een andere bron gebruik moet hebben gemaakt. Het is gebleken, dat dit de boven reeds vermelde Byzantijnsche verzameling van geschriften over mechanica en optica moet zijn geweest, waarin van Archimedes, behalve het werk *Over drijvende lichamen,* nog *Quadratuur van de Parabool* en *Evenwichten van vlakke figuren* zijn voorgekomen. Zij is langs denzelfden weg als de codex A in West-Europa terecht gekomen. De aanwezigheid ervan in de Pauselijke bibliotheek is vastgesteld voor de jaren 1295 en 1311; in latere jaren is er geen spoor meer van terug te vinden.

De codex B zelf is in 1508 te Rome in bezit geweest van den Duitschen geestelijke Andreas Conerus († 1527), een man met groote belangstelling in de Grieksche wiskunde, die er verschillende correcties in heeft aangebracht. Wie er verder tot aan het jaar 1740, waarin het in de bibliotheek van het Vaticaan is gekomen, de eigenaren van zijn geweest, kan men bij Heiberg nauwkeurig opgesomd vinden [1].

Van den codex A zijn verder nog verschillende Grieksche afschriften genomen. Tusschen 1449 en 1468 heeft de kardinaal Bessario [2] er een laten maken (bij Heiberg E = codex Marcianus 305 Venetie); een tweede copie (bij Heiberg D = codex Laurentianus 28, 4to Florence) dateert uit den tijd, waarin Valla het origineel bezat; ze werd in 1491 op last van den beroemden Florentijnschen humanist Angelo Poliziano [3]) voor de bibliotheek der Medici vervaardigd; dit schijnt niet zonder eenig tegenstreven van de zijde van den eigenaar gegaan te zijn, die zijn schat met ware jalousie bewaakte en die er verder ook aan niemand inzage van heeft willen verleenen. Twee andere belangrijke copieën (G = codex Parisiensis 2360 en H = codex Parisiensis 2361) zijn gemaakt in den tijd, dat het origineel aan de familie Pio behoorde. H werd in

[1]) *Opera* III, lxiii.

[2]) Bessario leefde van 1403 tot 1472 en was cardinaal van 1439 af. Hij heeft een belangrijk aandeel gehad in de herleving van de belangstelling in de Grieksche cultuur.

[3]) Angelo Poliziano (1454—1494) is een beroemd humanist aan het hof van Lozenzo de' Medici.

1544 geschreven door Christoph Auer op last van den bisschop Georges d'Armagnac, gezant van Frans I te Rome, ten behoeve van de Koninklijke Bibliotheek te Fontainebleau. Verschillende andere minder belangrijke afschriften gaan we met stilzwijgen voorbij.

Wel moet nog een tweede belangrijke Latijnsche vertaling van A worden gememoreerd, die in 1450 op last van Paus Nicolaas V door Jacob van Cremona, geestelijke van San Cassiano, werd gemaakt. Een copie hiervan, gecorrigeerd met behulp van E, werd nl. ca. 1468 door Johannes Regiomontanus [1]) van zijn eerste Italiaansche reis naar Duitschland meegebracht; een plan, het werk uit te geven, is niet tot uitvoering gekomen; het manuscript, dat te Neurenberg bewaard wordt [2]), heeft echter later dienst gedaan bij de samenstelling van de editio princeps.

Tot dusver spraken we slechts over handschriften. In de 16e eeuw gaf echter de groeiende behoefte aan kennisname van de werken der groote Grieksche mathematici aanleiding tot het stand komen van gedrukte uitgaven van werken van Archimedes.

De oudste hiervan komt voor in een thans zeer zeldzaam boekje van den Napolitaanschen wiskundige Luca Gaurico over de quadratuur van den cirkel, dat in 1503 te Venetië verscheen [3]); men vindt hierin de Latijnsche vertaling van *Cirkelmeting* en *Quadratuur van de Parabool,* ontleend aan codex B vóór haar correctie door Conerus.

Een letterlijke copie van deze editie, vermeerderd met den Latijnschen tekst van *Evenwichten van vlakke figuren* en van Boek I van *Over drijvende lichamen* is in 1543 door Nicolo Tartaglia [4]) gepubliceerd [5]). De bewerker geeft in zijn voorrede hoog op van de

---

[1]) Johann Müller, afkomstig uit een plaatsje bij Königsberg, daarom Regiomontanus of Johannes de Monte Regio genoemd, was de voornaamste Duitsche wiskundige en astronoom der 15e eeuw. Hij leefde van 1436 tot 1476.

[2]) Norimbergensis Cent. V, 15, chartaceus manu Regiomontani scriptus.

[3]) *Tetragonismus id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boetium mathematicae perspicacissimos adinventa.* Venetiis 1503. Geciteerd *Opera* III, lxiii.

[4]) Nicolo Tartaglia (Brescia 1506—Venetie 1557) is een bekend Italiaansch wiskundige.

[5]) *Opera Archimedis Syracusani Philosophi et Mathematici ingeniosissimi per* Nicolaum Tartaleam Brixianum (*Mathematicarum scientiarum cultorem) multis erroribus emendata, expurgata, ac in luce posita, multisque necessariis additis, quae plurimis locis intellectu*

groote moeilijkheden, die hij bij de ontcijfering en vertaling van oude en vrijwel onleesbare Grieksche handschriften heeft moeten overwinnen en die hij alleen te boven is gekomen met hulp van zijn „ongeloofelijk verlangen", het werk tot stand te brengen. Volgens Heiberg is het echter een onbeschaamde leugen, dat hij ook maar één Griekschen tekst zou hebben gebruikt; hij heeft de editie van Gaurico en een afschrift van den codex B met fouten en al klakkeloos overgeschreven [1]). Uit de nalatenschap van Tartaglia heeft in 1565 Curtius Trojanus, uitgever te Venetie, het geheele werk *Over drijvende lichamen* gepubliceerd [2]).

Intusschen was in 1544 te Bazel door Thomas Gechauff, bijgenaamd Venatorius, de editio princeps van de werken van Archimedes in het licht gegeven [3]); zij bevat alle destijds bekende werken in het Grieksch met Latijnsche vertaling, benevens de commentaren van Eutokios. De Grieksche tekst is ontleend aan een manuscript [4]), dat Bilibaldus Pirckheymer († 1530) in Rome verworven had; het is in hoofdzaak een afschrift van A, maar de schrijver schijnt bij zijn werk ook B te hebben geraadpleegd; de Latijnsche tekst is die van de boven reeds vermelde vertaling van Jacob van Cremona, gecorrigeerd door Regiomontanus.

In 1558 verscheen te Venetie een Latijnsche vertaling van een aantal werken van Archimedes van de hand van den verdienstelijken kenner der Grieksche wiskunde Federigo Commandino [5]); ze bevat

---

difficillima erant, commentariolis sane luculentis et eruditissimis aperta, explicata atque illustrata existunt. Appositisque manu propria figuris quae graeco exemplari deformatae ac depravatae erant, ad rectissimam Symetriam omnia instaurata, reducta et reformata elucent. Ventiis 1543.

1) *Opera* III, lxiv.

2) *Archimedis de insidentibus aquae* ..... *(ex recensione Nicolai Tartaleae)* Venetiis 1565.

3) *Archimedis Syracusani Philosophi ac Geometriae Excellentissimi Opera quae quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atque à quam paucissimis visa; nuncque primum et Graece et Latine edita. Adiecta quoque sunt Eutocii Ascalonitae in eosdem Archimedis libros Commentaria item Graece et Latine, nunquam antea excusa.* Basileae. Ioannes Hervagius excudi fecit. MDXLIIII.

4) Codex Norimbergensis cent. V app. 12 chartaceus s. XVI.

5) Federigo Commandino (uit Urbino, 1509—1575) gaf Latijnsche vertalingen uit van Euclides, Archimedes, Apollonios, Aristarchos, Ptolemaios, Heroon en Pappos. *Archimedis Opera non nulla a* Federico Commandino Urbinate *nuper in latinum conversa, et commentariis illustrata.* Venetiis MDLVIII.

Cirkelmeting, Over Spiralen, Quadratuur van de Parabool, Over Conoiden en Sphaeroiden en *De Zandrekenaar;* de tekst is ontleend aan B of een afschrift daarvan; een Griekschen codex heeft de uitgever niet gebruikt; de editie van Tartaglia kent hij niet. In 1565 heeft hij zijn uitgave gecompleteerd met een vertaling van het werk *Over drijvende lichamen* [1]). Tegen het eind der 16e eeuw zag nog een nieuwe vertaling van alle werken in het Latijn het licht, de *Monumenta* van Francesco Maurolico [2]).

Aan de gedrukte edities in het Grieksch en Latijn, die in de 16e eeuw tot stand zijn gekomen, zijn in latere tijden nog talrijke andere toegevoegd. We vermelden hiervan ten eerste de editie van David Rivault [3]) (Parijs 1615); zij geeft de proposities in het Grieksch en het Latijn, de bewijzen, eenigszins bewerkt, in het Latijn. Op deze editie steunt de oudste vertaling in een levende taal, namelijk in het Duitsch door J. C. Sturm [4]) (Neurenberg 1670). In Engeland bezorgde Isaac Barrow [5]) een nieuwe Latijnsche editie (Londen 1675), terwijl Wallis [6]) *Zandrekenaar* en *Cirkelmeting* met den commentaar van Eutokios op het laatstgenoemde werk uitgaf (Oxford 1676). Aan het eind van de 18e eeuw verscheen, eveneens te Oxford, de monumentale editie van den Griekschen tekst met Latijnsche

---

[1]) *Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo a* Federico Commandino Urbinate *in pristinum nitorem restituti, et commentariis illustrati.* Bononiae MDLXV.

[2]) *Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica quae extant .... ex traditione doctissimi viri* D. Francisci Maurolici. Panormi MDCLXXXV. Dit is een latere herdruk van de oorspronkelijke editie van 1570, die, op enkele exemplaren na, in een schipbreuk verloren is gegaan. Francesco Maurolico (Messina, 1494—1575) gaf edities en commentaren van verschillende Grieksche wiskundigen uit.

[3]) Zie noot 2 van blz. 165.

[4]) Joh. Chr. Sturm, *Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher, übersetzt und erläutert* (Nürnberg 1670). Drie jaar eerder had dezelfde schrijver ook den *Zandrekenaar* vertaald. Geciteerd bij Heath, *Archimedes, Introduction* xxx.

[5]) Is. Barrow, *Opera Archimedis, Apollonii Pergaei conicorum libri, Theodosii sphaerica methodo novo illustrata et demonstrata.* Londini 1675. Geciteerd bij Heath, *Archimedes, Introduction* xxx.

[6]) *Archimedis Syracusani Arenarius et Dimensio Circuli. Eutocii Ascalonitae in hanc Commentarius. Cum Versione et Notis* Joh. Wallis. Oxonii 1676. Ook in Johannis Wallis *Opera Mathematica tribus voluminibus contenta.* III (Oxoniae 1699), 509, 539. John Wallis (1616—1703) is een bekend Engelsch wiskundige; hij was Savilian Professor voor geometrie te Oxford.

vertaling van den Italiaanschen wiskundige Jozef Torelli [1]) (na zijn dood uitgegeven door Abram Robertson).

Hierop zijn weer vertalingen in levende talen gevolgd, een van de werken *Over Bol en Cylinder* en *Cirkelmeting* in het Duitsch door K. F. Hauber [2]) (Tübingen 1708), een Fransche van alle werken met commentaar door F. Peyrard [3]) (Parijs 1807) en een Duitsche met kritische toelichting door Ernst Nizze [4]) (Stralsund 1824).

Intusschen was de kennis van het werk van Archimedes nog door twee nieuwe vondsten verrijkt: Foster [5]) in Engeland en Borelli [6]) in Italië hadden in de 17e eeuw met korten tusschentijd Latijnsche vertalingen uitgegeven van een werk van den Arabischen wiskundige Tâbit ibn Qurra, [7]) waarin in ieder geval vondsten van Archimedes worden behandeld [8]); en Lessing [9]) had in 1773 een epigram gepu-

---

[1]) Zie noot 6 van blz. 166. Torelli (1721—1781) is een Italiaansch philoloog; de geciteerde editie bevat een biographie.

[2]) *Archimeds zwey Bücher über Kugel und Cylinder. Ebendesselben Kreismessung. Ubersetzt, mit Anmerkungen .... begleitet* von Karl Friedrich Hauber. Tübingen 1708.

[3]) Zie noot 7 van blz. 184.

[4]) *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von Ernst Nizze.* Stralsund 1824.

[5]) *Miscellanea sive Lucubrationes Mathematicae Samuelis Foster, Olim Londini in Collegio Greshamensi Astronomiae Professoris Publicae* (sic). *Omnia in lucem edita, et pleraque Latine reddita, operâ et Studio* Johannis Twysden. Londini MDCLIX. Tractatus XI. *Lemmata Archimedis apud Graecos et Latinos jam pridem desiderata e vetusto codice M. S. Arabico à* Johanne Gravio *traducta et nunc primum cum Arabum Scoliis publicata ....* Londini MDCLIX. *Lemmata Archimedis, ex traductione Thebit ibn Corae: cum Commentariis Excellentis Viri, Abi Alhonîn Alî, filii Almed Alnaswaei.*

[6]) *Archimedis Liber Assumptorum interprete Thebit Ben-Kora exponente Almochtasso. Ex codice Arabico manuscripto Ser. Magni Ducis Etruriae* Abrahamus Ecchellensis *Latine vertit.* Io. Alfonsus Borellus *Notis illustravit.* Dit werk vormt een aanhangsel van Borelli's werk: *Apollonii Pergaei Conicorum Lib.* V. VI. VII.; ed. Io. Alfonsus Borellus. Florentiae MDCLXI.

[7]) Tâbit Ibn Qurra (afkomstig uit Haran, Mesopotamie; geb. 826—27 of 835—36; † 901) is een van de belangrijke vertalers van Grieksche en Syrische werken in het Arabisch; het werk van hem en zijn school heeft veel bijgedragen tot het bewaard blijven van de werken der Grieksche mathematici.

[8]) Het door Tâbit vertaalde werk kan in den vorm, waarin wij het bezitten, niet van Archimedes zijn, omdat hij er zelf verscheidene malen in wordt geciteerd.

[9]) Gotthold Ephraim Lessing, *Zur Geschichte der Literatur. Aus den Schätzen der herz. Bibliothek zu Wolfenbüttel.* Zweiter Beitrag. Braunschweig 1773. Zie ook *Sämtliche Schriften,* ed. Lachmann; 3e Ausgabe (F. Muncker). XIII (Leipzig 1897) 99.

bliceerd, waarin het aan Archimedes toegeschreven *Runderprobleem* wordt geformuleerd.

Niettemin bleven er nog verschillende lacunes over. Vooreerst waren (en zijn nog heden) verschillende werken onbekend, die door antieke schrijvers worden geciteerd (waarover straks nader), maar bovendien ontbrak nog steeds de Grieksche tekst van *Over drijvende lichamen.* In 1828 publiceerde de kardinaal Angelus Maii [1]) op grond van twee in het Vaticaan ontdekte handschriften enkele Grieksche fragmenten van Boek I van dit werk, die men lang voor deelen van den oorspronkelijken tekst van Archimedes heeft gehouden en die als zoodanig zelfs nog voorkomen in de eerste moderne teksteditie van zijn werken, die J. L. Heiberg in 1884 bezorgd heeft [2]). Later is echter komen vast te staan, dat de door Maii gepubliceerde fragmenten niets anders waren dan pogingen tot reconstructie van den Griekschen tekst door terugvertaling uit het Latijn van de hand van een onbekenden geleerde, niet vroeger dan de 16e eeuw. En bovendien werd in het gemis, dat zij hadden moeten vergoeden, definitief voorzien door de opzienbarende ontdekking (in 1899) van een nieuw Archimedes-handschrift, dat ook op ander gebied van onschatbare waarde voor de kennis van zijn werken zou blijken te zijn.

Dit handschrift (de codex C van Heiberg) is ontdekt [3]), doordat de aandacht van Heiberg viel op een bericht van Papadopoulos Kerameus over een palimpsest met oorspronkelijk mathematischen inhoud in de bibliotheek van het klooster S. Sepulchri te Jerusalem. Hij onderzocht het manuscript te Constantinopel in de jaren 1906 en 1908. Het bleek een op perkament geschreven Archimedes-tekst uit

---

[1]) Het volgende is ontleend aan H. Bosmans, loc. cit. (noot 1 van blz. 193) Separaat pag. 17 seq.

[2]) *Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii* ed. J. L. Heiberg. Leipzig 1880—1881. 2 vol.

[3]) De volgende bijzonderheden over den codex *C* zijn ontleend aan het bericht van Heiberg over zijn ontdekking: *Eine neue Archimedeshandschrift.* Hermes XLII (1907), 235 seq. Men vindt aldaar (243—297) ook de eerste publicatie van den Griekschen tekst. Een Duitsche vertaling met commentaar van H. G. Zeuthen verscheen in Bibliotheca Mathematica (3) VII (1906—1907), een Engelsche van T. L. Heath in *The Method of Archimedes, recently discovered by J. L. Heiberg. A Supplement to The Works of Archimedes* 1897. Cambridge 1912. Een uitvoerige studie geeft Enrico Rufini, *Il „Metodo" di Archimede e le origini dell' analisi infinitesimale nell' Antichità.* (Per la Storia e la Filosofia delle Matematiche, No. 4) Roma 1926.

de 10e eeuw te bevatten, die men in de 12e, 13e of 14e eeuw had trachten uit te wisschen, om er een Euchologion voor in de plaats te schrijven. Heiberg is er in geslaagd, den oorspronkelijken tekst grootendeels te ontcijferen en hij vond daarbij, naast deelen van *Over Bol en Cylinder, Over Spiralen, Cirkelmeting* en *Evenwichten van vlakke figuren,* ten eerste een aanzienlijk deel van den Griekschen tekst van *Over drijvende lichamen* en vervolgens, wat nog zeer veel belangrijker was, bijna volledig een nog onbekend werk van Archimedes, waarvan het bestaan alleen door citaten bij enkele oude schrijvers bekend was [1]). Het wordt daarin als *Ἐφόδιον* of *Ἐφοδικόν* aangeduid; in zijn eigen titel heet het *Ἔφοδος*, wat we door *Methode* kunnen weergeven. Zooals bij de bespreking van den inhoud blijken zal, heeft dit werk ons een waarlijk nieuw inzicht in de denkwijze van Archimedes gegeven. Het manuscript C bleek ten slotte nog fragmenten te bevatten van het werk *Στομαχίον*, waarin een soort puzzle, ook bekend als *loculus Archimedius,* behandeld wordt en waarvan een ander fragment in het Arabisch bewaard is gebleven [2]). Hierdoor is tevens komen vast te staan (wat Heiberg vroeger betwijfelde), dat het *Stomachion* inderdaad een werk van Archimedes is.

De in C nieuw gevonden teksten komen uiteraard nog niet voor in de Engelsche uitgave van de werken van Archimedes in moderne notatie, die T. L. Heath in 1897 deed verschijnen [3]); door de uitgave van een supplement [4]) is later, voorzoover de *Methode* betreft, in deze leemte voorzien. De eerste editie, waarin alle thans bekende werken voorkomen, is de tweede teksteditie van J. L. Heiberg [5]), waarop alle later nog verschenen vertalingen zijn gebaseerd.

Van deze nieuwere vertalingen noemen we in de allereerste plaats de zeer betrouwbare, absoluut woordelijke en van uitvoerige toelichtingen voorziene overzetting in het Fransch door den Belgischen ingenieur Paul Ver Eecke [6]); daarnaast vindt men Duitsche verta-

[1]) Suidas vermeldt het met mededeeling, dat Theodosios er een commentaar bij had geschreven. (ed. Bekker, Berlijn 1854; s. v. Theodosios, 495, col. 1). Heroon citeert het in de *Metrika (Heronis Opera* III, 80, 84, 130).

[2]) Dit fragment is gepubliceerd door H. Suter: *Der loculus Archimedius oder Das Syntemachion des Archimedes* ... Abh. z. Gesch. d. Math. 9 (1899), 491—500. Men vindt het in Duitsche vertaling *Opera* II, 420.

[3]) Zie de lijst van te citeeren werken vóór Hoofdstuk I.

[4]) Zie noot 3 van blz. 199.

[5]) Zie de literatuurlijst.

[6]) Zie de literatuurlijst.

PROSPEKT

EINFÜHRUNG IN DIE NEUEREN METHODEN DER DIFFERENTIALGEOMETRIE

VON

J. A. SCHOUTEN
IN DELFT

UND

D. J. STRUIK
IN CAMBRIDGE. MASS.

ZWEITE VOLLSTÄNDIG UMGEARBEITETE AUFLAGE

ERSTER BAND

ALGEBRA UND ÜBERTRAGUNGSLEHRE

VON

J. A. SCHOUTEN

Preis fl 6.00, geb. fl 6.90
RM. 10, geb. RM. 11.50

P. NOORDHOFF N.V. — 1935 — GRONINGEN-BATAVIA

BERNHARD HERMANN & G. E. SCHULZE, Thalstr. 2 u. 3, LEIPZIG

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Die zweite Auflage, die wir hiermit dem Druck übergeben, unterscheidet sich von der ersten in so vielen wesentlichen Punkten, dass sie eigentlich ein ganz neues Buch ist. Der auffälligste Unterschied ist wohl, dass von der doppelten Formulierung, einmal in Formeln der direkten Analysis, einmal in Formeln des Ricci-Kalküls, vollständig abgesehen ist. Wir sind der Meinung, dass der Ricci-Kalkül in den meisten Fällen die beste direkte Analysis ist, die es gibt und dass die eigentlichen d.h. indizesvermeidenden direkten Systeme sich nur dort bewährt haben, wo es sich, wie in der Vektoranalysis und im Matrizenkalkül, nur um Grössen der Valenz 1 und 2 und um ganz einfache Lage der Indizes und Überschiebungen handelt. Sodann ist zum ersten Male konsequent die Kern-Index-Methode angewandt, die kurz gesagt darin besteht, dass jedem geometrischen Objekt ein fester Kernbuchstabe zugeordnet wird, während Änderung des Bezugssystems durch Änderung der Indexart zum Ausdruck gebracht wird. Die konsequente Anwendung dieser Methode, die erst möglich wurde durch VEBLEN's Definition des geometrischen Objektes und die neueren Untersuchungen über anholonome Bezugssysteme, bildet auch den Hauptunterschied mit der Darstellung im R.K. [1]), wo die Methode nur bei der Einführung orthogonaler Bestimmungszahlen zur Verwendung gelangte. Einen typischen Charakterzug hat die zweite Auflage mit der ersten gemeinsam. Da wir ein elementares Lehrbuch schrieben oder wenigstens zu schreiben hofften, haben wir es wünschenswert erachtet nicht nur zahlreiche Aufgaben in den Text aufzunehmen, sondern auch alle Lösungen derselben am Ende des Bandes zu sammeln. Diese Aufgaben erfüllen einen doppelten Zweck, dem Anfänger geben sie eine Fülle von Übungsmaterial, dem Kenner bringen sie eine Menge von wichtigen Sätzen ohne den Text mit Beweisen zu überlasten. Das ausführliche diese Auflage auszeichnende Schlagwort- und Namenverzeichnis wird dem Leser sicher willkommen sein.

---

[1]) J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, Springer 1924, hier stets als R. K. zitiert.

Von den weiteren Verbesserungen des Formalismus, die im Anschluss an die Kern-Index-Methode ausgebildet wurden, gelangten insbesondere die Zeichen $\stackrel{*}{=}$ und $\stackrel{h}{=}$ zur Anwendung, die ein scharfe Trennung der invarianten Gleichungen von den nicht oder nicht voll invarianten ermöglichen, sowie die Methode der Abdrosselung der Indizes, die durch deutliche Unterscheidung von lebendigen und toten Indizes zu einer viel klareren Formulierung führt. Das Zeichen $=$ wird nur verwendet für diejenigen Gleichungen (fast alle), die auch beim Übergang zu anholonomen Bezugssystemen ihre Form erhalten. Auch die D-Symbolik von v. d. Waerden und Bortolotti, die sich bei Einbettungs- und Krümmungsproblemen aufs beste bewährt hat, ist mit in den Formalismus aufgenommen.

Der erste Band, der den Rechenapparat darstellt, enthält, den erweiterten Bedürfnissen, auch des Physikers, entsprechend, viel mehr als die mit diesem Bande korrespondierenden ersten zwei Abschnitte der ersten Auflage. Wo wir uns dort auf Mannigfaltigkeiten mit kwadratischer Massbestimmung beschränkten, drangen wir hier bis zu den gewöhnlichen linearen Übertragungen vor und berücksichtigten bei metrischen Problemen vielfach auch den gerade für die Physik wichtigen nicht definiten Fall. Neben den Affinoren fanden auch Affinordichten, hermitesche Grössen und Pseudogrössen gebührende Berücksichtigung. Die Hauptsätze der Elementarteilertheorie wurden aufgenommen, auch für hermitesche Grössen, und bei den gewöhnlichen und hermiteschen Grössen der Valenz Zwei wurde der Anschluss an den Matrizenkalkül, einem Bedürfnisse der Zeit entsprechend, besonders eingehend behandelt. Das selbe gilt von der Theorie der von der Princeton Schule in den Vordergrund des Interesses gerückten Normalkoordinaten und der Koordinaten von Fermi, während bei der Integrabilitätstheorie mit den neuesten Errungenschaften und Formulierungen Rechnung gehalten ist. Einführung des Anholonomitätsobjektes gestattete eine einfache Behandlung der für die physikalische Anwendungen so wichtigen und auch für viele geometrische Betrachtungen recht praktischen anholonomen Bezugssysteme, die fast überall herangezogen wurden. Bei der Behandlung des Krümmungsaffinors wurde die von E. Cartan herrührende geometrische Deutung der Bianchischen Identität und der zweiten Identität gebührend berücksichtigt. Der letzte Abschnitt bildet eine kurze Einführung in die Theorie der Variation und der Deformation.

Es ist überhaupt darnach gestrebt im ersten Bande dem Leser

einen vollständigen und möglichst leicht fasslichen Überblick zu geben über den algebraischen und analytischen Rechenapparat der gewöhnlichen linearen Übertragungen. Damit ist aber auch gleichzeitig die Grenze angegeben, die nirgends überschritten wurde. Die Geometrien von FINSLER und BERWALD, sowie die projektive und konforme Differentialgeometrie fallen somit ausserhalb des Ramens unserer Betrachtungen.

Der zweite Band bringt Anwendungen des im ersten Bande dargestellten Apparates auf Gegenstände der Differentialgeometrie, wobei Bevorzugung der wichtigsten und elegantesten Teile erstrebt wurde. Dazu wurde nicht nur das in den letzten zwei Abschnitten der ersten Auflage dieses Buches aufgenommene Material wieder in erweiterter Form aufgenommen, sondern auch fast alles, was die vergriffene G. D. [1]) enthält. Nur der Teil der G. D., der über kontinuierliche Transformationsgruppen handelt, blieb unberücksichtigt, teilweise um das Buch nicht zu überlasten, teilweise weil man in EISENHART's Büchern über Riemannsche Geometrie und über kontinuierliche Gruppen jetzt leicht zugängliche Darstellungen dieses Gebietes besitzt. Bei allen diesen Anwendungen standen natürlicherweise die Riemannschen Mannigfaltigkeiten V_n im Vordergrund, da sich in diesen die allgemeine Natur der Sätze der gewöhnlichen Differentialgeometrie wohl am leichtesten und am wenigsten kompliziert zeigt; wo aber andere lineare Übertragungen wichtige Anwendungen boten, haben wir auch diese mit aufgenommen.

Es bringt der zweite Band also zunächst eine Kurvenlehre, die mit den Frenetschen Formeln für Riemannsche und für allgemeine lineare Übertragungen anfängt, wonach die Lehre der Kongruenzen (Systeme von ∞^{n-1} Kurven) und die der Bahnsysteme (Systeme von $\infty^{2(n-1)}$ Kurven) folgen. Da wir in V_n prinzipiell auch den nicht definiten Fall mit in Betracht ziehen, werden auch isotrope Gebilde berücksichtigt. Ein natürlicher Schritt führt dann von den Kongruenzen zu den $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, wobei sowohl die n-fachen Orthogonalsysteme wie die beiden Fundamentaltensoren berücksichtigt werden. Dann folgt die eingebettete m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $m < n-1$, mit der Theorie der Krümmungsaffinoren der Valenz Drei. Ausführlich werden hier die Verallgemeinerungen der Frenetschen Formeln besprochen und die sich daran knüpfenden Theoreme über die Einbettungs-

---

[1]) D. J. STRUIK, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, J. Springer, 1922; hier stets als G. D. zitiert.

möglichkeit einer V_m in eine S_n, d.h. eine V_n konstanter Krümmung. Wir schliessen diesen Abschnitt mit Betrachtungen über Deformationen und isotrope Mannigfaltigkeiten. Im letzten Abschnitt werden bahntreue und konforme Transformationen behandelt, wobei auch die subprojektiven Mannigfaltigkeiten von B. KAGAN in den Stoff eingereiht werden. Eine Besprechung hermitescher Übertragungen schliesst den zweiten Band.

Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgehen, dass im zweiten Bande, insbesondere in den ersten Abschnitten, die Probleme nicht durch sofortige Entkettung des allgemeinen Rechenapparates für beliebige Dimensionenzahl behandelt werden, sondern zunächst mal der Anschluss an die gewöhnliche Differentialgeometrie gewonnen wird. Wir glauben dass die dadurch entstandene Verlängerung des Textes sich aus didaktischen Gründen rechtfertigt, bereitet doch erfahrungsgemäss gerade dieser Anschluss dem Anfänger die meisten Schwierigkeiten.

Obgleich die Verfasser durch ständigen brieflichen und persönlichen Kontakt versucht haben, beide Bande zu einem einheitlichen Ganzen zu gestalten, muss hervorgehoben werden, dass J. A. SCHOUTEN speziell der Verfasser des ersten und D. J. STRUIK der des zweiten Bandes ist.

Bei den Literaturangaben wurde keine Vollständigkeit angestrebt, sondern nur das gebracht was wir für besonders wichtig und für den Leser interessant hielten.

Wir möchten an dieser Stelle Frau T. VAN AARDENNE-EHRENFEST und die Herren D. VAN DANTZIG in Delft, J. HAANTJES in Delft und V. HLAVATÝ in Prag herzlichst danken für die mühsame Arbeit des Mitlesens der Korrekturen. Die vielen richtigen Bemerkungen und Ratschläge, die wir von ihnen, sowie von den Herrn L. BERWALD in Prag, E. BORTOLOTTI in Florenz und A. HOBORSKI in Krakau empfangen durften, ermöglichten den definitiven Text an vielen Stellen zu verdeutlichen und zu verbessern.

Der Firma Erven P. NOORDHOFF, Groningen, unseren besten Dank für die sorgfältige Behandlung der Korrekturen.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Vorwort zur zweiten Auflage VII
Anhaltspunkte bei der Verwendung der Indizes XI

I. ALGEBRAISCHES.

§ 1. **Koordinatensysteme und Gruppen.**

Koordinaten 1
Geometrische Objekte 2
Kleinsche Geometrien 3

§ 2. **Die algebraische Geometrie der E_n.**

Gruppe 4
Invariante Definitionen 4
Invariante Eigenschaften 5
Invariante Zahlen 5
Invariante Gebilde 6
Grössen 6
Invariante Beziehungen 10
Invariante Operationen und Verknüpfungen 11
Einige wichtige Grössen 20
Einschränkung der Gruppe 30
Abkürzende Bezeichnungen 32

§ 3. **Affinoren der Valenz Zwei in E_n.**

Allgemeines 35
Nicht hermitesche gemischte Affinoren der Valenz Zwei 38
Nicht hermitesche ko- und kontravariante Affinoren der Valenz Zwei 42
Hermitesche ko- und kontravariante Affinoren der Valenz Zwei . 47

§ 4. **Die algebraische Geometrie der R_n.**

Der Fundamentaltensor 48
Die Gruppe 51
Der Hauptachsensatz eines Tensors 57
Der Hauptblättersatz eines Bivektors 57
Infinitesimale orthogonale Transformationen 58

§ 5. **Die algebraische Geometrie der U_n.**

Der Fundamentaltensor 59
Die Gruppe 61
Der Hauptachsensatz eines hermiteschen Tensors 62
Infinitesimale unitäre Transformationen 63

Seite

II. ÜBERTRAGUNGSLEHRE.

§ 6. Bezugssysteme.

Die lokalen E_n 65
Die Massvektoren 66
Anholonome Bezugssysteme 67
Das Pfaffsche Problem 69
Das X_{n-p}-bildende kovariante einfache p-Vektorveld 71

§ 7. Die linearen Übertragungen.

Pseudoparallele Verschiebung 73
Kovariante Differentialquotienten 78
Asymmetrie einer linearen Übertragung 79

§ 8. Die Übertragung, ausgedrückt in $a_{\lambda\varkappa}$, $\nabla_\mu a^{\varkappa\lambda}$ und $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$.

Allgemeine lineare Übertragungen 83
Metrische und halbmetrische Übertragungen 84

§ 9. Die D-Symbolik von van der Waerden—Bortolotti.

Die Formel von R. LAGRANGE 89
Einspannung 89
Die in X_m induzierte Übertragung 90
Die D-Symbolik 93

§ 10. Geodätische Gebilde.

Geodätische Linien 97
Lokalgeodätische und geodätische X_m in A_n 98
Geodätische Bezugssysteme und Normalkoordinaten 100
Der Reduktionssatz 105
Normalkoordinaten in bezug auf eine X_m in A_n 106

§ 11. Krümmung.

Mehrfache Differentiation 109
Geometrische Deutung von $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ 110
Die vier Identitäten für $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ 112
Die einfachsten algebraischen Komitanten von $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ 114
Geometrische Bedeutung der Skalare K und $\varkappa$ in einer gewöhnlichen V_n 115
Geometrische Deutung der Tensoren $K_{\lambda\varkappa}$ und $G_{\lambda\varkappa}$ in einer gewöhnlichen V_n 119
Integrabilitätstheorie 120

Seite

Die Bianchische Identität 123
Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung 125
Die E_n als spezieller Fall der A_n 126
Der Krümmungsaffinor, ausgedrückt in $a_{\lambda\varkappa}$, $Q_{\mu}^{\cdot\varkappa\lambda}$ und $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ . . 128
Der verallgemeinerte Satz von Stokes 129
Geometrische Deutung der Bianchischen Identität und der zweiten Identität 132
Geometrische Deutung einer Gleichung der Form $\nabla_\mu P^{\mu\varkappa}_{\cdot\cdot\lambda} = 0$. 135
Beziehungen des Krümmungsaffinors und seiner kovarianten Ableitungen zu den Normalaffinoren in A_n 137
Andere Form des Reduktionssatzes 137
Die Cartansche ω-Symbolik 138

§ 12. **Variation und Deformation.**

Mitschleppen eines Feldes 140
Linien extremer Länge in einer V_n 143
Die Lagrangesche Ableitung 144
Deformationsprobleme 148

Lösungen und Anweisungen 152
Literaturverzeichnis 186
Index 197
Fehlerverzeichnis 204

lingen in de serie *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* van de hand van A. Czwalina [1]). We geven als slot van dit hoofdstuk een overzicht van de werken van Archimedes in de volgorde, waarin ze in de editie van Heiberg voorkomen en waarin ze ook in dit werk grootendeels zullen worden behandeld. Voorzoover het de eerste acht werken betreft, is dit de traditioneele volgorde van de van A afstammende handschriften; zij is echter niet dezelfde, waarin de werken zijn ontstaan of gepubliceerd; hoe deze geweest is, is slechts ten deele met eenige zekerheid te zeggen; voorzoover ze bekend is, geven we haar (volgens Heath [2])) aan door de tusschen haakjes geplaatste rangnummers in Indo-Arabisch cijferschrift. In de volgende hoofdstukken zullen de werken veelal worden geciteerd met de achter elk vermelde afkorting.

I.	(5)	OVER BOL EN CYLINDER. Twee boeken.	*περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α' β'.* *De Sphaera et Cylindro.* **S.C.**
II.	(9)	CIRKELMETING.	*κύκλου μέτρησις.* *Dimensio Circuli.* **D.C.**
III.	(7)	OVER CONOIDEN EN SPHAEROIDEN.	*περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων.* *De Conoidibus et Sphaeroidibus.* **C.S.**
IV.	(6)	OVER SPIRALEN.	*περὶ ἑλίκων.* *De lineis spiralibus.* **SPIR.**
V.	(1)	EVENWICHTEN VAN VLAKKE FIGUREN OF ZWAARTEPUNTEN VAN VLAKKE FIGUREN. Boek I.	*Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βάρῶν ἐπιπέδων α'.* *De planorum aequilibriis sive de centris gravitatis planorum* I. **PL.AE. I.**
VI.	(3)	IDEM. Boek II.	**PL.AE. II.**

[1]) Verschenen zijn de volgende vertalingen:
Ueber Spiralen (No. 201; 1922). *Kugel und Zylinder* (No. 202; 1922). *Die Quadratur der Parabel und Ueber das Gleichgewicht ebener Flächen* (No. 203; 1923). *Ueber Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide* (No. 210; 1923). *Ueber schwimmende Körper und Die Sandzahl* (No. 213; 1925).

[2]) T. L. Heath, *Greek Mathematics* II, 22.

VII.	(10)	DE ZANDREKENAAR.	*Ψαμμίτης.* *Arenarius.*	**AREN.**
VIII.	(2)	QUADRATUUR VAN DE PARABOOL.	*τετραγωνισμός παραβολῆς* [1]. *Quadratura Parabolae.*	**Q.P.**
IX.	(8)	DRIJVENDE LICHAMEN. Twee Boeken.	*Ὀχουμένων α'β'.* *De corporibus fluitantibus.*	**C.F.**
X.		STOMACHION.	*Στομαχίον* *Loculus Archimedius.*	
XI.	(4)	DE METHODE DER MECHANISCHE THEOREMATA, VOOR ERATOSTHENES.	*περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρός Ἐρατοσθένην ἔφοδος.* *De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus.*	**METH.**
XII.		LEMMATA.	*Liber Assumptorum.*	
XIII.		HET RUNDERPROBLEEM.	*πρόβλημα βοεικόν.* *Problema Bovinum.*	

Over verloren gegane werken van Archimedes bezitten we de volgende berichten [3]).

1. Pappos [4]) vermeldt onderzoekingen van Archimedes over halfregelmatige veelvlakken. We komen op den inhoud van zijn referaat terug in Hoofdstuk XV

2. Archimedes citeert in den *Zandrekenaar* enkele malen [5]) een ouder geschrift van zijn hand over het uitdrukken van groote getallen, dat aan Zeuxippos was toegezonden. Als titel wordt gewoonlijk opge-

---

[1]) Deze titel is zeker niet authentiek, omdat bij Archimedes het woord parabool nog niet voorkomt in de beteekenis van een kegelsnede. De oorspronkelijke titel moet hebben geluid: *τετραγωνισμὸς τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς.*

[2]) Vroeger gewoonlijk: *De insidentibus aquae* of *De iis quae in humido vehuntur.*

[3]) Grootendeels opgesomd bij J. L. Heiberg, *Quaestiones Archimedeae,* Kopenhagen 1879. p. 29—30.

[4]) Pappos, *Collectio* V, 19, 350.

[5]) *Opera* II, 216; l. 17—19. 220; l. 11. 236; l. 19—20.

geven *'Αρχαί (Beginselen)*, door Hultsch [1]) echter *κατονόμαξις τῶν ἀριθμῶν (Benoeming van getallen)*. De inhoud van dit geschrift is in den *Zandrekenaar* verwerkt.

3. De beide boeken *Evenwichten van vlakke figuren* bevatten zeker niet alle geschriften van Archimedes op het gebied der Statica. Men vindt nog verscheidene andere titels vermeld; het is echter niet mogelijk, met eenige zekerheid uit te maken, of hiermee ook inderdaad steeds verschillende werken worden bedoeld. Waarschijnlijk is Boek I van *Evenwichten van vlakke figuren* een excerpt uit een omvangrijker werk, *Elementen der Mechanica* (*Στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν*), dat Archimedes zelf onder dezen titel citeert [2]). Elders zegt hij, dat iets bewezen is in de *Evenwichten* (*ἐν ταῖς 'Ισορροπίαις* [3]) of *ἐν τοῖς 'Ισορροπικοῖς* [4]), terwijl daarmee in het eerste geval zeker niet het werk *Evenwichten van vlakke figuren* bedoeld kan zijn, omdat de geciteerde stelling daarin niet voorkomt. Dan vermeldt Pappos [5]) een werk *περὶ ζυγῶν (Over balansen)*, terwijl bij Heroon (in een Duitsche vertaling van een Arabischen tekst) van een *Buch der Stützen* sprake is [6]). Dat een mededeeling van Simplikos nog op het bestaan van een werk *κεντροβαρικά* zou wijzen, is onwaarschijnlijk [7]).

4. Theoon van Alexandria schrijft in zijn commentaar op den *Almagest* aan Archimedes een werk over optica toe (*περὶ κατοπτρικῶν* [8])

Deze mededeeling wordt bevestigd door Apuleius, die verschillende optische onderwerpen opsomt, die Archimedes in een *volumen ingens* behandeld zou hebben [9]). Olumpiodoros citeert een uitspraak van hem over lichtbreking [10]) en de Scholia op de *Catoptrica* van

[1]) Hultsch bij Pauly-Wissowa, *Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft* s. v. Archimedes, col. 511*a*.

[2]) C. F. II, 2. *Opera* II, 350; l. 21—22.

[3]) C. F. II, 2. *Opera* II, 350; l. 14.

[4]) **Meth.** 1. *Opera* II, 438.

[5]) Pappos, *Collectio* VIII, 11; 1068.

[6]) *Mechanica* 25. *Heronis Opera* II, 1; 70.

[7]) Simplikios in zijn commentaar op *De Caelo* van Aristoteles (*Scholia in Aristotelem;* coll. C. A. Brandis, Berlijn 1836; 508 a 30.) zegt, dat Archimedes en vele anderen schoone *κεντροβαρικά* hebben geschreven, maar dit beduidt alleen, dat zij over barycentrische onderwerpen schreven.

[8]) *Claudii Ptolemaei Magnae Constructionis, id est Perfectae coelestium motuum pertractionis Libri XIII. Theonis Alexandrini in eosdem Commentariorum Libri XI.* Basileae MDXXXVIII. Comm. in I, 3; pag. 10.

[9]) *Apulei Apologia sivi Pro se de magia liber.* Cap. 16. ed. H. E. Butler and A. S. Owen. (Oxford 1914).

Als behandelde onderwerpen noemt hij de vragen, waarom in vlakke, bolle en holle spiegels het beeld opv. evengroot is als, kleiner dan en grooter dan het voorwerp; waarom links en rechts bij de beeldvorming verwisseld worden; waarom het beeld soms in en soms voor een zelfden spiegel ligt; waarom men met holle spiegels, waarop zonlicht valt, brandstof kan doen ontvlammen enz. Apuleius van Madaura is een Afrikaansche schrijver in de 2e eeuw na Chr. De bedoelde passage is afgedrukt *Opera* II, 550.

[10]) Olympiodoros *in Aristotelis Meteorologica,* afgedrukt *Opera* II, 550. Olympiodoros is een Grieksch historicus en alchemist, ca. 400.

Euclides bevatten een bewijs van zijn hand over de gelijkheid van de hoeken van inval en terugkaatsing[1]).

5. In Hoofdstuk I werd reeds het werk *περὶ σφαιροποιίας (Over het vervaardigen van spheren)* besproken, waarin Archimedes de constructie van zijn planetaria zou hebben behandeld. Op technisch gebied vindt men bij Arabische schrijvers nog vermeld dat hij een werk over wateruurwerken zou hebben geschreven[2]). Er is zelfs een Arabische verhandeling over dit onderwerp onder zijn naam bewaard, waarin hij een uitvoerige beschrijving van een wateruurwerk geeft[3]).

6. Ten slotte worden hem door Arabische schrijvers nog allerlei planimetrische verhandelingen toegekend[4]): *Over cirkels, die elkander raken. Over parallele rechten. Over driehoeken. Over de eigenschappen van rechthoekige driehoeken. Over de aannamen voor de Elementen der Geometrie. Boek der Data* of *Definities. Over den zevenhoek in den cirkel.*

Het bestaan van het laatstgenoemde werk is wel vast komen te staan door de ontdekking van een referaat van den Arabischen wiskundige Tâbit ibn Qurra over dit onderwerp, dat enkele jaren geleden met een Duitsche vertaling is gepubliceerd[5]). Hierover nader in Hoofdstuk XV.

---

[1]) *Euclidis Opera* VII, 348; no. 7. Het bewijs berust op de omkeerbaarheid van den lichtstraal

[2]) Aldus al-Qifṭī, geciteerd by E. Wiedemann (loc. cit. noot 2 van blz. 167) p. 249.

[3]) E. Wiedemann (loc. cit.) p. 257. Als eigenaardigheid van het door Archimedes behandelde toestel wordt vermeld, dat daarin ieder uur een raaf een bol in een schaal liet vallen, waardoor een toon ontstond.

[4]) Heiberg, loc. cit. (noot 3 van blz. 202). 29—30. E. Wiedemann, loc. cit., p. 248.

[5]) *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l—Raihân Muh. ibn Ahmad al-Bîrûnî, dargestellt nach Al-Qânûn al-Mas'ûdî* von Carl Schoy. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Ruska und Heinrich Wieleitner. (Hannover 1927). pag. 74 seq.

HOOFDSTUK III.

DE ELEMENTEN VAN HET WERK VAN ARCHIMEDES.

Door de voltooiïng van de *Elementen* van Euclides waren de Grieksche mathematici in het bezit gekomen van een systematisch geordende verzameling van de wiskundige grondstellingen, waarop zij in hun verdere onderzoekingen konden voortbouwen. Zij waren daardoor ontslagen van de verplichting, in hun werken nog weer

terug te komen op zaken van elementair, d.w.z. fundamenteel karakter: van een stelling, die in de *Elementen* stond, was, bij de blijkbaar algemeene verspreiding van het werk, de enkele vermelding voldoende.

Voor de kennismaking met een schrijver van het peil van Archimedes beduidde echter en beduidt nog de beheersching van de *Elementen* van Euclides weliswaar een noodige, maar nog geenszins een voldoende voorwaarde, aan de voorbereiding van den lezer te stellen; menigmaal vindt men namelijk bij hem ook verwijzingen naar de *Elementen der Kegelsneden* (τὰ κωνικὰ στοιχεῖα), waarmee dan een der werken over dit onderwerp moet zijn bedoeld, die door Aristaios [1]) en Euclides [2]) waren samengesteld. Blijkbaar hebben echter de verschillende Elementenverzamelingen, die in den tijd van Archimedes in omloop waren, nog niet alle fundamenteele eigenschappen bevat, die hij voor de uiteenzetting van zijn speciale onderzoekingen noodig had; herhaaldelijk leidt hij in zijn werken nog stellingen van elementair karakter af of hij formuleert ze met de opmerking, dat het bewijs eenvoudig te leveren is.

De eischen die Archimedes aan de mathematische voorbereiding van zijn lezers stelt, beduiden voor den hedendaagschen wiskundige, die de elementen van zijn wetenschap op zoo geheel andere wijze leert kennen als de discipelen van Euclides, niet zelden belemmeringen in de lectuur, terwijl zijn gewoonte, aan de eigenlijke kern van zijn werken talrijke hulpstellingen te laten voorafgaan, waarvan de bedoeling eerst blijkt, wanneer ze, veel later, worden toegepast, het al evenmin gemakkelijk maakt, den draad van zijn betoog vast te houden.

Om aan al deze bezwaren tegemoet te komen, zullen we in dit Hoofdstuk zooveel mogelijk de niet bij Euclides voorkomende elementaire stellingen die door Archimedes worden geciteerd, uitgesproken of bewezen, tot een elementenstelsel vereenigen, waarvan de bestudeering een voldoende voorbereiding tot de studie van zijn eigenlijke onderzoekingen zal kunnen vormen; we onderstellen daar-

[1]) Aristaios (de oudere) is een oudere tijdgenoot van Euclides. Volgens Pappos (*Collectio* VII, 30; 672) schreef hij een werk in vijf boeken over meetkundige plaatsen, dat in verband stond met de leer der kegelsneden (συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς)

[2]) Pappos (*Collectio* VII, 30; 672) zegt, dat Apollonios de vier boeken *Conica* van Euclides aanvulde en (ibidem VII, 34; 676), dat Euclides op Aristaios voortbouwde.

bij echter den inhoud van de *Elementen* van Euclides in hoofdtrekken bekend [1]).

Den lezer, wien het er alleen om te doen is, zich eenigszins snel over het meest essentieele van de onderzoekingen van Archimedes te orienteeren, wordt aangeraden, dit Hoofdstuk over te slaan en het bij lectuur der volgende desgewenscht te raadplegen, wanneer er bij toepassing van een hier behandelde hulpstelling naar verwezen wordt; met het oog op dergelijke verwijzingen is een decimale notatie ingevoerd [2]).

We geven hier eerst een korte samenvatting van de symbolen, die in dit werk voor de weergave van de Grieksche mathematische redeneeringen zullen worden gebruikt en van de voornaamste eigenschappen, die ten opzichte van het te behandelen Elementenstelsel zelf reeds elementair zijn.

0,1. **Notaties:**

Een rechthoek met zijden a en b	**O** (a, b)	**O** van 'Ορθόγωνιον
Een vierkant met zijde a	**T** (a)	**T** van Τετράγωνον
Een cirkel met diameter d	**K** (d)	**K** van Κύκλος
De reden van twee gelijksoortige [3]) grootheden A en B	(A, B)	

De reden van twee vierkanten met zijden a, b wordt dus b.v. geschreven

$$[\mathbf{T}\,(a), \mathbf{T}\,(b)]$$

De genoemde symbolen worden vooral gebruikt in de toepassingen der z.g. Oppervlakterekening of Geometrische Algebra, die het instrument is, waarvan de Grieksche analytische meetkunde zich bedient en waarvan de beginselen bij Euclides behandeld worden [4]). Desgewenscht kan men iedere door deze symbolen uitgedrukte redeneering onmiddellijk in de thans gebruikelijke algebraische notatie omzetten door de substituties

$$\mathbf{O}\,(a, b) = ab \qquad \mathbf{T}\,(a) = a^2 \qquad (A, B) = A : B$$

0,2. **Grondbegrippen der oppervlakterekening** [4]).

---

[1]) Zie de citeerafspraak in de Literatuurlijst.

[2]) De wijze van citeeren is: III, gevolgd door de decimale aanduiding.

[3]) Twee grootheden A en B heeten gelijksoortig, wanneer ze voldoen aan het axioma van Eudoxos, dus wanneer er natuurlijke getallen m en n bestaan, zoodat

$$m\,.\,A > B \quad \text{en} \quad n\,.\,B > A$$

[4]) *Elementen van Euclides* II, 12; 103.

0,21. Men zegt, dat een vlakke figuur **X** *parabolisch* wordt aangepast aan een lijnstuk A, wanneer een lijnstuk B wordt geconstrueerd, zoodat

$$\mathbf{O}\,(A, B) = \mathbf{X}$$

0,22. Men zegt, dat een vlakke figuur **X** *elliptisch* wordt aangepast aan een lijnstuk A met defect van voorgeschreven vorm (Δ, E), wanneer **X** parabolisch wordt aangepast aan een lijnstuk $B < A$, zoodat

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}\,(B, \Gamma) \quad \text{èn} \quad (\Gamma, A - B) = (\Delta, E)$$

0,23. Men zegt, dat een vlakke figuur *hyperbolisch* wordt aangepast aan een lijnstuk A met exces van voorgeschreven vorm (Δ, E), wanneer **X** parabolisch wordt aangepast aan een lijnstuk $B > A$, zoodat

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}\,(B, \Gamma) \quad \text{èn} \quad (\Gamma, B - A) = (\Delta, E)$$

0,24. De Grieksche namen voor de drie genoemde bewerkingen zijn opv. παραβολή (parabool), ἔλλειψις (ellips) en ὑπερβολή (hyperbool).

0,3. **Grondbegrippen der redentheorie** [1].

0,31. Wanneer $(A, B) = (B, C)$
heet (A, C) de *dubbelreden* (διπλασίων λόγος) van (A, B)

Symbool: $(A, C) = \boldsymbol{\Delta\Lambda}\,(A, B)$

In dit geval is $(A, C) = [\mathbf{T}\,(A), \mathbf{T}\,(B)]$

Het algebraisch aequivalent van het nemen van een dubbelreden is het vormen van het quadraat van een verhouding. Immers uit $a : b = b : c$ volgt

$$a : c = a^2 : b^2$$

0,32. Wanneer $(A, B) = (B, C) = (C, D)$
heet (A, D) de *tripelreden* (τριπλασίων λόγος) van (A, B)

Symbool: $(A, D) = \boldsymbol{T\Lambda}\,(A, B)$

Het algebraisch aequivalent van het nemen van een tripelreden is het vormen van de derde macht van een verhouding. Immers uit $a : b = b : c = c : d$ volgt

$$a : d = a^3 : b^3$$

0,33. Wanneer $(A, B) = (M, N)$ en $(B, C) = (P, Q)$

[1]) *Elementen van Euclides* II, 82—83.

heet (A, C) de *samengestelde reden* (συγκείμενος λόγος) van de redens (M, N) en (P, Q)

Het algebraisch aequivalent van het samenstellen van twee redens is het vormen van het product van twee verhoudingen. Immers uit $a : b = m : n$ en $b : c = p : q$ volgt

$$a : c = mp : nq$$

0,4. Hoofdbewerkingen der redentheorie [6]).

0,41. Uit een evenredigheid $(A, B) = (C, D)$ ontstaan door de hieronder te noemen bewerkingen de daarachter vermelde evenredigheden:

permutando of *alternando*	(ἐναλλάξ)	$(A, C) = (B, D)$	
invertendo	(ἀνάπαλιν)	$(B, A) = (D, C)$	
componendo	(συνθέντι)	$(A + B, B) = (C + D, D)$	
separando	(διελόντι)	$(A - B, B) = (C - D, D)$	mits $A > B$ en dus $C > D$
convertendo	(ἀναστρέψαντι)	$(A, A - B) = (C, C - D)$	mits $A > B$ en dus $C > D$

en door combinatie hiervan

invertendo componendoque	$(A + B, A) = (C + D, C)$
separando invertendoque	$(B, A - B) = (D, C - D)$
convertendo invertendoque	$(A - B, A) = (C - D, C)$

We zullen, afwijkend van de gewoonte der Grieksche mathematici, deze bewerkingen in den regel zonder vermelding van den naam uitvoeren.

0,42. De genoemde bewerkingen worden veelvuldig ook op ongelijkheden toegepast. Men lette hierbij op de mogelijke verandering van het ongelijkheidsteeken:

Uit $(A, B) > (C, D)$ [2]) volgt

permutando	$(A, C) > (B, D)$	
invertendo	$(B, A) < (D, C)$	
componendo	$(A + B, B) > (C + D, D)$	
separando	$(A - B, B) > (C - D, D)$	mits $A > B$ en $C > D$.
convertendo	$(A, A - B) < (C, C - D)$	mits $A > B$ en $C > D$.

en door combinatie hiervan

---

[1]) *Elementen van Euclides* II, 71—76.

[2]) We herinneren er aan, dat dit beduidt: er bestaat minstens een paar natuurlijke getallen m, n, zoodat

$$m \,.\, A > n \,.\, B \qquad \text{maar} \qquad m \,.\, C \leqq n \,.\, D$$

convertendo invertendoque	$(A - B, A)$	$>$	$(C - D, C)$
separando invertendoque	$(B, A - B)$	$<$	$(D, C - D)$
invertendo componendoque	$(A + B, A)$	$<$	$(C + D, C)$

De manier, waarop deze conclusies bewezen kunnen worden, blijkt voldoende uit het volgende voorbeeld:

Gegeven $(A, B) > (C, D)$

Te bewijzen: $(A + B, B) > (C + D, D)$

Bewijs: Vorm een grootheid $E > C$, zoodat $(A, B) = (E, D)$.

Componendo $(A + B, B) = (E + D, D) > (C + D, D)$

0,43. Een ongelijkheid tusschen redens blijft bij verdubbeling geldig.

D.w.z. Uit $(A, B) > (C, D)$ volgt $\Delta\Lambda\,(A, B) > \Delta\Lambda\,(C, D)$

0,44. Uit $(A, B) > (C, D)$ en $C > D$ volgt $A > B$.

Bewijs: Vorm E zoodat $(E, B) = (C, D)$, dan is $E < A$.

Uit $C > D$ volgt $E > B$, dus a fortiori $A > B$.

0,45. Is $A > B$ en C een willekeurige, maar met A en B gelijksoortige grootheid, dan geldt $(A, B) > (A + C, B + C)$

Bewijs: Uit $A > B$ volgt $(A, C) > (B, C)$ dus

$$(A + C, A) < (B + C, B)$$

waaruit *permutando*

$$(A + C, B + C) < (A, B)$$

0,45. We herinneren hier nog aan de conclusie *ex aequali*, waarin uit

$$(A, B) = (D, E)$$

en

$$(B, C) = (E, F)$$

wordt geconcludeerd tot

$$(A, C) = (D, F)$$

0,5. **Lemma van Euclides.**

Voor de bewerkingen van den z.g. indirecten limietovergang (III, 8) is elementair (d.w.z. fungeert als element) het z.g. lemma van Euclides (*Elementen* X, 1), waarin wordt uitgesproken, dat, wanneer men van een grootheid meer dan de helft afneemt, van de rest opnieuw meer dan de helft en zoo vervolgens, men ten slotte een grootheid overhoudt, die kleiner is dan een willekeurig voorgeschreven grootheid. Deze bewering geldt, zooals in een Porisma wordt vermeld, ook voor het geval, dat men telkens de helft van de nog overblijvende grootheid afneemt; in dit geval is ze aequivalent met de stelling

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Het proces van het voortgezette halveeren wordt aangeduid door het woord „dichotomie".

0,6. Cijfersysteem.

Voor het schrijven van getallen gebruikt Archimedes het alphabetische cijfersysteem, waarin door additieve iuxtapositie van lettersymbolen voor de getallen 1, 2 . . . 9, 10, 20 . . . 90, 100, 200 . . . 900 alle getallen beneden 1000 kunnen worden voorgesteld. De bedoelde symbolen zijn

$\bar{\alpha} = 1$	$\bar{\iota} = 10$	$\bar{\varrho} = 100$
$\bar{\beta} = 2$	$\bar{\varkappa} = 20$	$\bar{\sigma} = 200$
$\bar{\gamma} = 3$	$\bar{\lambda} = 30$	$\bar{\tau} = 300$
$\bar{\delta} = 4$	$\bar{\mu} = 40$	$\bar{\upsilon} = 400$
$\bar{\varepsilon} = 5$	$\bar{\nu} = 50$	$\bar{\varphi} = 500$
$\bar{\varsigma} = 6$	$\bar{\xi} = 60$	$\bar{\chi} = 600$
$\bar{\zeta} = 7$	$\bar{o} = 70$	$\bar{\psi} = 700$
$\bar{\eta} = 8$	$\bar{\pi} = 80$	$\bar{\omega} = 800$
$\bar{\vartheta} = 9$	(ϙ̄) $= 90$	ϡ̄ $= 900$

0,61. De getallen 1000, 2000 . . . . 9000 worden weergegeven door de symbolen voor 1, 2 . . . . 9, voorzien van een accent links beneden, het getal 10.000 door M (van $\mu\acute{\upsilon}\varrho\iota o\iota$) n-vouden van 10.000 door $\overset{n}{M}$

Voorbeeld:

$$\overset{\lambda\beta}{M}\overline{,\varsigma\varphi\xi\vartheta} = 326569.$$

0,62. Stambreuken worden geschreven met het symbool voor den noemer, voorzien van een accent rechts boven. Een uitzondering vormt de breuk ½, waarvoor het teeken L′ gebruikt wordt.

Voorbeeld:

$$\eta' = \tfrac{1}{8}$$

0,63. Algemeene breuken worden geschreven, hetzij in woorden, hetzij als sommen of veelvouden van stambreuken.

Voorbeelden: (**D.C.** 3)

$\delta\acute{\varepsilon}\varkappa\alpha$ $\varepsilon\beta\delta o\mu\eta\varkappa o\sigma\tau o\mu\acute{o}\nu\alpha$ = tien een-en-zeventigste

$$\bar{\iota}\ o\alpha' = \tfrac{10}{71}$$

$$\text{L}'\delta' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

DE LOGISCHE GRONDSLAGEN DER EUKLIDISCHE MEETKUNDE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

In een onder bovenstaanden titel in het tijdschrift *Christiaan Huygens* (XIII, 65 seq.) verschenen artikel van Prof. Dr. B. L. van der Waerden komen twee passages voor, waarin de schrijver kritiek uitoefent op zekere door mij in een te Groningen gehouden voordracht *Epistemisch Wiskunde-Onderwijs (Euclides* X, 165 seq.) uitgesproken meeningen over het schoolonderwijs in meetkunde. Naar aanleiding van deze passages moge ik hier enkele opmerkingen maken.

Het doel, dat de schrijver in zijn artikel beoogt, bestaat in de opstelling van een axiomatischen grondslag der Euclidische Meetkunde, die o.a. hierdoor wordt gekenmerkt, dat in plaats van het begrip gelijkheid (van hoeken en lijnstukken) het begrip verplaatsing als fundament van de theorie der congruentie wordt genomen; hij merkt op, dat hierdoor behalve een sterke vereenvoudiging der bewijzen ook een nauwere aansluiting zoowel aan de schoolmeetkunde als aan de analytische meetkunde verkregen wordt en hij vervolgt dan:

„De door den Heer D i j k s t e r h u i s zozeer verfoeide bewijzen „der congruentiestellingen komen bij deze wijze van opbouw weer „tot hun recht: het blijkt, dat de epitheta „wiskundig waardeloos" „en „schijnbewijs" op deze bewijzen slechts dan van toepassing „zijn, wanneer men bij de axiomatiek van H i l b e r t zweert, maar „niet, wanneer men van de even natuurlijke axiomatiek der Verplaat„singen uitgaat, welke van didactisch standpunt zelfs de voorkeur „boven die van H i l b e r t verdient. Tegenover het argument van „Dr. D i j k s t e r h u i s, dat men een driehoek niet kan opnemen en „weer neerleggen, „alsof het een plankje was", stel ik ten eerste, „dat men zich een verschuiving of wenteling van een mathematische

„driehoek precies even goed (of even slecht) kan voorstellen als „de driehoek zelf, zonder daarbij aan dikte of materiaal te denken, „en ten tweede, dat het begrip verplaatsing zich even goed laat „axiomatiseren, resp. in een analytisch opgebouwde meetkunde laat „definiëren als alle andere meetkundige begrippen, zodat ook van „streng-wiskundig standpunt het gebruik van verplaatsingen in geen „enkel opzicht verwerpelijk is."

De argumentatie, die de schrijver in deze regelen ontwikkelt, lijkt mij niet zeer gelukkig. In de eerste plaats is door mij natuurlijk nooit ontkend of zelfs maar betwijfeld, dat het begrip verplaatsing axiomatisch correct kan worden ingevoerd of analytisch streng kan worden gedefinieerd. Hoe zou dat mogelijk zijn? Prof. van der Waerden moge zelf, naar hij meedeelt, het denkbeeld om de verplaatsing aan de Euclidische meetkunde ten grondslag te leggen, eerst aan het leerboek der Analytische Meetkunde van Prof. Barrau danken, ik heb het voorrecht gehad lang voor het verschijnen van dat boek door den schrijver ervan viva voce te zijn ingewijd in de verschillende manieren, waarop men de verschillende meetkunden kan opbouwen; daardoor bevat de mededeeling, die Prof. van der Waerden zoo welwillend is, onder „ten tweede" te doen, niets, wat mij niet reeds sedert jaren bekend is en het ontgaat mij, in hoeverre zij tot bestrijding van mijn beoordeeling der superpositiemethode kan bijdragen.

Die beoordeeling toch had niet betrekking op een gebruik van verplaatsingen, dat op een der genoemde wijzen exact is gefundeerd, maar integendeel op een wijze van toepassing, waaraan die fundeering ontbreekt. Waar ik op tegen heb, is de in den traditioneelen leergang der meetkunde niet zelden gevolgde methode, om de bewijzen ten deele op expliciet geformuleerde axiomata te baseeren, maar zich dan voor een ander deel te beroepen op aanschouwelijke voorstellingen of ervaringen met vaste lichamen, zonder dat dit uitdrukkelijk wordt uitgesproken. Op die handelwijze slaan dan ook — het kan geen opmerkzamen lezer verborgen zijn gebleven — de door mij gebezigde epitheta en de gemotiveerdheid daarvan kan dus geenszins worden weerlegd, door te betoogen (wat, ik herhaal het, niemand betwijfelt), dat men haar wel door een correcte manier van doen kan vervangen.

Ik kan mij dus door de conclusie van Prof. van der Waerden, „dat ook van streng-wiskundig standpunt het gebruik van verplaat-

singen in geen enkel opzicht verwerpelijk is", niet in het minst in mijn opvattingen geschokt voelen. Het kan toch bezwaarlijk zijn bedoeling zijn, vol te houden, dat, wanneer een zekere methode in strengen vorm kan worden gebracht, men alleen daarom van streng-wiskundig standpunt geen bezwaar meer zou kunnen maken tegen haar onstreng gebruik.

Overigens lijkt het mij, dat de schrijver de mate van oorspronkelijkheid, die aan mijn bezwaren tegen de superpositiemethode toekomt, wel wat overschat; zij missen die oorspronkelijkheid namelijk ten eenen male, daar ze tot de klassieke bestanddeelen behooren van de allen tijde met zooveel animo gevoerde discussies over den opbouw der meetkunde; het is immers bekend, dat Euclides zelf ze blijkbaar reeds heeft gevoeld, daar hij de toepassing van het (niet geaxiomatiseerde) bewegingsbegrip zooveel vermijdt als maar eenigszins mogelijk is; verscheidene commentatoren (ik herinner aan Jaques Peletier) hebben ze uitdrukkelijk geformuleerd; men kan ze, om slechts twee namen uit vele te noemen, herhaald vinden bij Schopenhauer en toegelicht door Felix Klein. En in hetzelfde leerboek der Analytische Meetkunde, dat den schrijver inspireerde tot het denkbeeld, het begrip verplaatsing aan den opbouw der Euclidische Meetkunde ten grondslag te leggen (een denkbeeld, dat hij aanvankelijk ook als meer origineel schijnt te hebben beschouwd, dan het in werkelijkheid is), had hij ze nog eens weer kunnen lezen, waar Prof. Barrau de toepassingen van het bewegingsbegrip in de elementaire meetkunde als „handtastelijk, maar weinig logisch" beoordeelt.

Dat men zich verder, om tot het eerste argument van den schrijver over te gaan, het verschuiven van een mathematischen driehoek even goed kan voorstellen als den driehoek zelf, is heel gelukkig; daaruit vloeit namelijk de mogelijkheid voort, om het begrip verplaatsing op een ook didactisch bevredigende wijze te axiomatiseeren. Maar als argument tegen mijn opvatting zegt het ook weer niets: de mogelijkheid, iets als axioma te stellen, ontslaat niet van de verplichting, het ook te doen.

Wat ten slotte de opmerking over het „zweren bij Hilbert" betreft, de schrijver zal wellicht bij nadere overdenking inzien, dat hij beter zou hebben gedaan deze eenigszins wonderlijk aandoende uitlating in de pen te houden.

Ik wil in de tweede plaats een opmerking maken over een conclusie van didactischen aard, die de schrijver aan het slot van het tot dusver gepubliceerde deel van zijn verhandeling trekt en waarin hij het door mij bepleite denkbeeld, in de hoogere klassen van de middelbare school een axiomatischen opbouw van de Euclidische meetkunde te behandelen, onuitvoerbaar noemt op grond van het argument, dat vanzelfsprekende stellingen geen normalen leerling interesseeren en dat het wiskunde-onderwijs (wat niet de bedoeling kan zijn) ontzettend vervelend zou worden, wanneer men zulke stellingen ging bewijzen of als axioma ging formuleeren.

Deze argumentatie lijkt mij al even weinig geslaagd als de boven behandelde verdediging der superpositiemethode. Men kan in de eerste plaats de wiskundige leerstof onmogelijk indeelen in vervelende en niet vervelende gedeelten; wat vervelend wordt gevonden, hangt zeer sterk af van de wijze van behandeling en is bovendien bij de leerlingen onderling individueel sterk verschillend. Wanneer dus een onderwerp inderdaad onbehandelbaar is, wanneer het door sommige of alle leerlingen vervelend wordt gevonden, is wiskunde-onderwijs reeds thans in vele gevallen ondoorvoerbaar. De vraag is dan slechts of die ondoorvoerbaarheid toe zou nemen, wanneer in de hoogere klassen een eenigszins strenge behandeling van de axiomatica der Euclidische meetkunde werd gegeven. Prof. van der Waerden meent van wel; dat is een persoonlijke opinie, waarop hij het volste recht heeft; alleen is de zeer positieve wijze, waarop hij haar uitspreekt, eenigszins in strijd met het op blz. 65 aangekondigde voornemen, „het trekken van didactische conclusies aan meer ervaren leeraren over (te) laten", terwijl zij uit den aard der zaak ook niet op eenige directe ondervinding aangaande de behandelingsmogelijkheid der bedoelde leerstof steunt.

Nu moet ik dadelijk toegeven, dat ik, althans op het gebied van de meetkunde, die ondervinding ook niet in eenigszins belangrijke mate bezit: het wiskundig schoolbedrijf laat nu eenmaal weinig gelegenheid tot experimenten over. Naar mijn meening moet het echter wel degelijk mogelijk zijn, om bij leerlingen van hoogere klassen van inrichtingen van Voorbereidend Hooger Onderwijs belangstelling te wekken voor een axiomatische behandelingswijze van de naar inhoud reeds vertrouwde meetkundige leerstof, mits slechts aan de volgende voorwaarden voldaan is: a) de leerlingen moeten van een gehalte zijn, zooals men dat op een school voor

V.H.O. in onzen tijd van overbevolking van universiteiten en hoogescholen en de daaruit voortvloeiende noodzaak van scherpere schoolselectie behoorde te kunnen eischen; b) de leeraar moet voldoende enthousiasme voor axiomatica hebben, om zijn onderwerp levendig en boeiend te kunnen behandelen en overtuigd zijn van de waarde, die daaraan voor de scholing van het denken toekomt; c) er moet goed op gewezen worden, dat het doel van een axiomatische behandelingswijze der Euclidische meetkunde niet bestaat in het bijbrengen van de overtuiging van de juistheid der behandelde stellingen, maar uitsluitend in het verkrijgen van inzicht in den logischen samenhang, die ze met de axiomata en onderling verbindt.

De eigenlijke zwakke plek in het betoog van Prof. van der Waerden lijkt mij nu dit, dat hij in zijn didactische beschouwingen de onder c) gemaakte onderscheiding geheel over het hoofd heeft gezien. Ik behoef hem uit den aard der zaak niet uiteen te zetten, dat een bewijs als middel van overtuiging iets geheel anders is dan een bewijs als middel en toetssteen van ordening; ik geef hem echter in overweging, die onderscheiding niet uitsluitend te maken in de wetenschappelijke beoefening der wiskunde, maar ook in overwegingen van didactischen aard. Het is in de discussies, waartoe de didactiek der wiskunde onder de docenten der scholen van M. en V. H. O. aanleiding pleegt te geven, zoo gebruikelijk, dit te doen, dat een betoog, waarin het veronachtzaamd wordt, onvermijdelijk een eenigszins oppervlakkigen indruk moet maken.

Het denkbeeld van axiomatica op de scholen geef ik voorloopig dus niet aan de bezwaren van Prof. van der Waerden gewonnen. Ik ben overtuigd, dat het in die behandelingswijze nagestreefde ideaal van een zuiver redelijke, van allen samenhang met de empirie afziende fundeering der meetkunde wel degelijk in staat is, jeugdige gemoederen te bekoren; is die bekoring eenmaal gewekt, dan zal de behoefte aan logisch rigorisme, die hun leeftijd kenmerkt, verder het hare doen.

ANTWOORD AAN DE HEER DIJKSTERHUIS.

Toen ik op school in de meetkunde werd ingewijd, vond ik het begin: de invoering der begrippen hoek, lijn, lijnsegment, rechte hoek, enz., met inbegrip van de parallellen-theorie vooreerst vrij vervelend, omdat ik daarbij het gevoel had, niets nieuws te leren. Interessant werd het pas op het ogenblik, waarop met de gebruikelijke superpositie-methode de stelling van de gelijkbenige driehoek en de kongruentiestellingen bewezen werden. Dit was voor mijn gevoel het eigenlijke beginpunt: hier werd men voor het eerst met nieuwe waarheden bekend, die dan naderhand buitengewoon vruchtbaar bleken.

Precies dezelfde ervaring, die ik aan één enkele leerling, nl. aan mijzelf had opgedaan, heeft mijn vader als wiskunde-leraar telkens weer bevestigd gevonden. De ordenings-eigenschappen van het platte vlak, zelfs al worden zij nog zo oppervlakkig en onvolledig geformuleerd, wekken ook bij meetkundig-geinteresseerde leerlingen weinig belangstelling, daarentegen levert de toepassing der superpositie-methode één der spannendste momenten van het gehele meetkunde-onderwijs op.

Van deze schoolervaring uitgaande, werd ik natuurlijk tot tegenspraak geprikkeld, toen ik bij Dr. Dijksterhuis in Euclides 10, pag. 208 de bewering vond, dat het gebruikelijke bewijs voor de kongruentie van twee driehoeken, die twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben, „nog nooit aan iemand de overtuiging van de juistheid der stelling geschonken heeft, die haar nog niet bezat", en dat dit „schijnbewijs" wiskundig waardeloos is. Dr. Dijksterhuis stelt voor, deze kongruentiestelling liever als axioma aan te nemen. Aangezien bij deze methode het bovengenoemde dramatische moment een groot deel van zijn werking en daardoor ook van zijn pedagogische waarde zo verliezen, is het gewenst, de argumenten, die Dr. Dijksterhuis voor dit voorstel aanvoert, nader onder de loupe te nemen.

Het eerste, didaktische argument, dat het beschouwde bewijs nog nooit aan iemand de overtuiging van de juistheid der stelling zou hebben geschonken, is door de aangevoerde ervaringsfeiten reeds weerlegd: ik ben zo iemand geweest. Het tweede argument was de wiskundige waardeloosheid van het superpositie-„schijnbewijs". Nu weet ik heel goed, dat de superpositie-methode bij een groot aantal wiskundigen een onbehaaglijk gevoel wekt. Hiervoor zijn ook een

aantal goede redenen. Er wordt een nieuw, niet in de axioma's vastgelegd en volgens veler gevoelen meer mechanisch dan wiskundig element in de bewijsvoering gebracht. Om deze redenen vermeed reeds Euklides zoveel mogelijk het gebruik van deze methode. Toch vond hij deze niet geheel waardeloos, immers hij maakte er een paar maal van gebruik. En tegenover de opvatting, dat het „handtastelijk" opnemen en weer neerleggen slechts met mechanische, harde voorwerpen, niet met meetkundige figuren mogelijk is, kan men — ik herhaal het — aanvoeren, dat verschuiving en wenteling zuiver meetkundige begrippen zijn, die op mathematische driehoeken en niet slechts op vaste lichamen toegepast kunnen worden.

Wanneer ik het verweer van Dr. Dijksterhuis goed begrijp, noemt hij nu de gebruikelijke superpositiebewijzen hierom schijnbewijzen, omdat de aan de aanschouwing ontleende elementen, waarop zij berusten, niet uitdrukkelijk als axioma's geformuleerd zijn. Indien dit de bedoeling is, dan zijn de meeste bewijzen uit Euklides' Elementen schijnbewijzen. Het bewijs bv. van de stelling, dat de som van twee zijden van een driehoek groter is dan de derde zijde, berust op allerlei ordenings-axioma's, die bij Euklides nergens geformuleerd zijn. Toch is dit bewijs geenszins waardeloos, immers het kan in een streng axiomatische opbouw vrijwel woordelijk worden overgenomen. Precies hetzelfde nu geldt ook voor de superpositiebewijzen, gelijk ik in mijn „Logische Grondslagen" aangetoond heb. Zij zijn weliswaar voor de axiomatiek van Hilbert waardeloos, maar in een andere axiomatische opbouw, die van het begrip verplaatsing uitgaat, komen zij volledig tot hun recht.

Het verheugt mij, dat de heer Dijksterhuis deze wijze van axiomatisering „ook didactisch bevredigend" noemt. Dit betekent, naar ik aanneem, dat onze diskussie tot overeenstemming heeft geleid, aangaande de wenselijkheid, de superpositiemethode voor schoolgebruik niet te verwerpen, doch hoogstens haar axiomatische basis hechter te maken.

Ik kom nu tot het tweede punt van Dr. Dijksterhuis' verweer: de vraag, of een strenge behandeling van de ordeningsaxioma's op school op haar plaats is. Laat ik beginnen met enkele misverstanden weg te nemen. Ten eerste: ik heb mij geen oordeel aangematigd over het gehele samengestelde vraagstuk van een axiomatische fundering van de Euklidische Meetkunde in de hogere klassen.

Daartoe zou inderdaad het ervaringsmateriaal, waarover ik beschik, evenzeer onvoldoende zijn als dat van Dr. Dijksterhuis. Ik oordeelde slechts over de ordeningseigenschappen van de ruimte, het vlak en de rechte lijn, waarvoor ik in zo nauw mogelijke aansluiting aan de schoolbehoeften een stelsel axioma's en bewijzen aangegeven had, en waarover ik, mede op grond van ervaringsfeiten, die ik straks zal noemen, een oordeel meende te kunnen vellen. Ten tweede: Dr. Dijksterhuis beschuldigt mij van oppervlakkigheid, omdat ik de toch zo voor de hand liggende onderscheiding tussen een bewijs als middel van overtuiging en een bewijs als toetssteen van logische samenhang over 't hoofd zou hebben gezien. Ik neem aan, dat de nauwlettende lezer zelf wel zal hebben bemerkt, dat deze onderscheiding tussen twee soorten bewijzen integendeel de grondslag van mijn betoog vormt. Ik beschouw immers in dit betoog uitsluitend bewijzen van de tweede soort, geef er maar liefst 16 voorbeelden van, merk uitdrukkelijk op, dat alle bewezen stellingen aanschouwelijk evident zijn (waaruit dus volgt, dat de bewijzen niet als overtuigingsmiddel, maar slechts als toetssteen van logische samenhang waarde hebben), en stel dan de bewering op, dat zulke bewijzen, althans in zo vermoeiend groot aantal, op school niet op hun plaats zijn, omdat bewijzen van vanzelfsprekende stellingen volgens mijn vaste overtuiging geen normale leerling interesseren. Ik kan niet toegeven, dat ik hier een onderscheiding tussen twee soorten bewijzen uit het oog zou hebben verloren, waar ik bewust uitsluitend aan één der beide soorten gedacht heb. Wel kan ik mijn bewering aangaande de geestdodende werking van bewijzen van zulke evidente stellingen als bv. dat een rechte het vlak in twee delen verdeelt of dat de punten van een rechte geordend kunnen worden, aan de hand van enkele ervaringsfeiten nader toelichten.

Vooreerst herinner ik aan de in de aanhef van dit antwoord meegedeelde waarneming. De daaruit getrokken konklusies worden bevestigd door de volgende algemene opmerking: De belangstelling van leerlingen en studenten, zelfs van degenen, die een zekere wiskundige aanleg bezitten, is in 't algemeen veel meer gericht op nieuwe feiten, vooral van aanschouwelijke aard, en op konstrukties en formules, dan op de logische samenhang tussen die feiten en formules. Deze ervaring heb ik als docent en examinator telkens weer opgedaan. Nu weet ik wel, dat het doel van het epistemische wiskunde-onderwijs juist is, niet de feiten maar de logische samen-

hang op de voorgrond te plaatsen en de leerlingen in het vinden van die logische samenhang te scholen. Maar dit doel kan m.i. het beste worden bereikt, door in een stof, die de leerlingen op zichzelf interesseert, zoveel mogelijk logika te brengen. Logika wordt (behalve door een kleine kategorie van spitsvondigen) het meest gewaardeerd, wanneer zij tot tastbare nieuwe resultaten leidt, het minst, wanneer zij slechts dient om bekende feiten uit andere bekende feiten af te leiden. Dit geldt niet alleen voor diegenen, die in de logika en in 't preciese formuleren van hun gedachten opzichzelf niet erg sterk zijn, maar ook voor anderen, wier belangstelling vooral op aanschouwelijke en konkrete resultaten gericht is. Het zou zonde zijn, deze kostbare belangstelling onbevredigd te laten terwille van zuiver-logische onderzoekingen, die men ten slotte toch aan niet-belangstellenden niet kan opdringen.

Ten slotte: Hoe abstrakter men het wiskunde-onderwijs maakt, d.w.z. hoe meer men zich van tastbare en voor konkrete toepassing vatbare resultaten verwijdert terwille van de studie der abstrakte logische relaties, des te meer versterkt men de haat tegen de wiskunde, die grote kategorieën van leerlingen bezielt. En wie eenmaal met die haat is bezield, staat in een afwerende positie, waardoor elke gunstige werking van het wiskunde-onderwijs op zijn geest verijdeld wordt.

Het zou mij verheugen, wanneer ik ook dit deel van de diskussie met een konklusie zou kunnen afsluiten, waarmee ook Dr. Dijksterhuis zich zou kunnen verenigen. Wellicht is dit het geval met de volgende formulering: Het is gewenst, de aan de aanschouwing ontleende veronderstellingen, waarop de schoolmeetkunde berust, meer dan tot dusver meestal geschiedt uitdrukkelijk (als axioma's) te formuleren. Men kan hiermee een begin maken bij de invoering der verplaatsingen en de bewijzen der kongruentiestellingen. Het is echter niet wel doenlijk, met de axiomatisering zover te gaan, dat alles wordt bewezen en niets meer stilzwijgend wordt verondersteld. In het bizonder geldt dit voor de ordeningsrelaties, dus voor de begrippen „tussen", „aan verschillende zijden van", enz. Men zal het eens moeten proberen met een axiomatische bespreking van de grondslagen der meetkunde in de hogere klassen, waarbij dan empirisch zal moeten blijken, hoever men hiermee kan gaan zonder de belangstelling van de leerlingen te verliezen.

B. L. VAN DER WAERDEN.

NASCHRIFT BIJ HET ANTWOORD VAN PROF. VAN DER WAERDEN.

Het zal ongetwijfeld met de bedoelingen van mijn hooggeachten opponens strooken, indien ik in dit Naschrift nog even kort meedeel, in hoeverre ik mij kan vereenigen met de twee conclusies, die hij als vrucht der gedachtenwisseling aanbiedt. Daarnaast mogen dan nog enkele losse opmerkingen een plaats vinden.

Wanneer Prof. van der Waerden mij de opvatting toeschrijft, dat ik de gebruikelijke superpositiebewijzen schijnbewijzen noem, omdat de aan de aanschouwing ontleende elementen, waarop zij berusten, niet uitdrukkelijk als axiomata zijn geformuleerd, begrijpt hij mij inderdaad goed. Met de daaruit volgende conclusie, dat de meeste bewijzen uit de *Elementen* van Euclides schijnbewijzen zijn, kan ik mij, behoudens den term „de meeste", die ik niet zoo dadelijk voor mijn verantwoording zou willen nemen, uiteraard vereenigen: op verschillende van die bewijzen is de gebruikte qualificatie inderdaad van toepassing; dit is, meende ik, reeds lang in confesso. Dat intuitieve overtuigingsmiddelen, die nog geen bewijzen zijn, door onderschuiving van een axiomatische basis bewijzen kunnen worden, is evident; en dat het met de superpositiebewijzen ook zoo kan gaan, heeft van den aanvang af een punt van overeenstemming tusschen ons uitgemaakt.

Of ik dus de superpositiemethode voor het onderwijs wil aanvaarden? Ongetwijfeld! Maar dan onder een van de volgende twee voorwaarden: men geve haar een behoorlijke axiomatische basis; of men onthoude haar iedere logische fundeering, maar men onthoude die dan ook aan tal van andere in het aanvangsonderwijs in meetkunde gebruikte bewijsmiddelen en quasi-logisch afgeleide stellingen. Ik zie, om slechts één voorbeeld te noemen, niet in, dat, wanneer men driehoeken mag opnemen en elders weer mag neerleggen, en daarbij gebruik mag maken van de ervaringen, die het hanteeren van vaste lichamen ons heeft geschonken, men bewijzen moet, dat de som van twee zijden van een driehoek grooter is dan de

derde zijde en dus een logischen grondslag moet geven aan het inzicht, dat een omweg een omweg is.

Bij de bespreking van het tweede punt van ons meeningsverschil verklaart Prof. van der Waerden zich overtuigd, dat de nauwlettende lezer wel zal hebben bemerkt, dat de onderscheiding tusschen een bewijs als middel van overtuiging en als toetssteen van ordening den grondslag vormt van zijn betoog tegen de mogelijkheid, op de scholen een axiomatische behandeling van de grondslagen der Euclidische Meetkunde te geven; indien die overtuiging juist is, is de qualificatie „eenigszins oppervlakkig", die ik van zijn redeneering gaf, hoogelijk misplaatst en ben ik zelf uit de categorie van de nauwlettende lezers uitgeschakeld. Bezien we dus de bedoelde didactische passage, waarop, zooals uitdrukkelijk gezegd is, mijn oordeel uitsluitend betrekking had, eenigszins nader!

„Wij hebben", aldus Prof. van der Waerden, „achtereenvolgens 5 axioma's en 16 stellingen geformuleerd, die *alle* aanschouwelijk evident zijn, en die bijna alle zonder uitdrukkelijke formulering in het onderwijs als vanzelfsprekend vóóronderstelde worden. Moet men nu al die stellingen in de klas bewijzen of ze alle als axioma's uitdrukkelijk formuleren? Dit zou het meetkunde-onderwijs naar mijn mening ontzettend vervelend maken. Vanzelfsprekende stellingen interesseren geen normale leerling, noch in de eerste, noch in de vijfde klas. En door het doceren van vervelende stof kan het doel van het wiskunde-onderwijs, onverschillig hoe men dit doel stelt, nooit worden bereikt."

Ziehier dus het betoog, waarvan de onderscheiding tusschen twee soorten van bewijzen den grondslag zou vormen. Ik moet tot mijn spijt verklaren, dat ik er dien grondslag nog steeds niet in kan vinden. Het adjectief „vanzelfsprekend" alleen is immers reeds een voldoende aanwijzing, dat hier aan bewijzen uitsluitend gedacht wordt als middel van overtuiging en niet als middel van logische ordening. Van wat vanzelfsprekend is, behoeft men niet meer overtuigd te worden en het is niet prettig, wanneer iemand dat met alle geweld toch wil doen; maar behoeft, wat vanzelfsprekend is, ook niet meer logisch geordend te worden en moet het bepaald „ontzettend vervelend" zijn, wanneer daartoe een poging wordt gedaan? Prof. van der Waerden meent van wel, maar op het karakter van vanzelfsprekendheid der stellingen kan hij zich daarbij onmogelijk beroepen.

Ik blijf dus van meening, dat de schrijver de motiveering van zijn afwijzing van het denkbeeld van een streng-axiomatischen opbouw der school-meetkunde schuldig blijft en ik kan mij ook door het bezigen van de uitdrukking „eenigszins oppervlakkig" alleen in zooverre bezwaard gevoelen, dat het mij zou spijten, indien hij daardoor minder aangenaam getroffen zou kunnen zijn.

Ten slotte kan ik mij met de laatste conclusie van zijn betoog weer geheel vereenigen: axiomatica in de hoogere klassen van scholen van V. H. O. zal, onder de door mij gestelde voorwaarden, eens geprobeerd moeten worden en de ervaring zal over de mogelijkheid moeten beslissen. Intusschen verheugt het mij, dat Prof. van der Waerden het denkbeeld toch blijkbaar niet meer geheel onuitvoerbaar acht.

E. J. DIJKSTERHUIS.

EEN MEETKUNDIGE AFLEIDING VOOR HET MINIMUM VAN DEVIATIE

DOOR

Dr. S. P. SLAGTER.

Bekend is het feit, dat wanneer een lichtstraal op een prisma valt, zoodanig, dat invalshoek en brekingshoek op het eerste grensvlak zijn i en r, en op het tweede grensvlak i_1 en r_1, (zie fig. 1), dat dan de uittredende straal een deviatie D heeft ondergaan, waarbij

$$D = (i - r) + (i_1 - r_1).$$

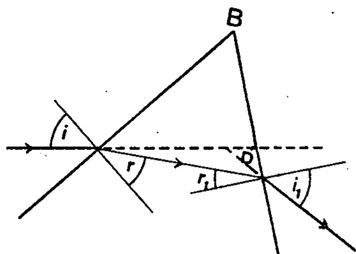


Fig. 1.

Men heeft het minimum van deviatie, als de lichtstraal symmetrisch loopt, dus als $i = i_1$ en $r = r_1$.

Ik vond hiervoor een meetkundig bewijs, dat ik nog nergens gepubliceerd zag, en dat mij voor mathematici wel interessant lijkt.

Ik ga uit van het feit, dat de som der hoeken r en r_1 constant blijft, bij een variabelen invalshoek i. Immers. $r + r_1 = B$. (brekende hoek).

Teeken den hoek B. In de figuur is genomen 60°, wat ook in de praktijk veel genomen wordt; BM is de bissectrix (zie fig. 2). Trek een willekeurige lijn BP, en neem $\angle ABP = r$ dan is $\angle PBC = r_1$.

Op een zeer eenvoudige wijze kan men nu de bijbehoorende hoeken i en i_1 construeeren.

Neem BA $=$ BC $= 3$ en construeer met A en B als middelpunten cirkels met stralen 2. Gedacht wordt hier aan een brekingsindex $\frac{3}{2}$, maar in het algemeen kan men nemen AB $=$ BC $= n$ en als stralen 1.

De lijn BP snijdt die cirkel in de punten X, Y, H, K.

Op grond van de sinuswet is het duidelijk, dat

$$\angle AXP = i$$

en $\angle CYP = i_1$.

Hieruit volgt dat

$$\angle \text{BAX} = i - r$$
$$\text{en} \quad \angle \text{BCY} = i_1 - r_1.$$

Zoodat dus de deviatie voorgesteld wordt meetkundig door boog DX + boog YF.

Wij zullen nu bewijzen, dat boog DX + boog YF altijd grooter is dan de vleugelfiguur DZF, m.a.w. laat men BP draaien om B, dus r en r_1 varieeren, dan heeft men het minimum van deviatie als BP door Z gaat, dus als $r = r_1$ en $i = i_1$.

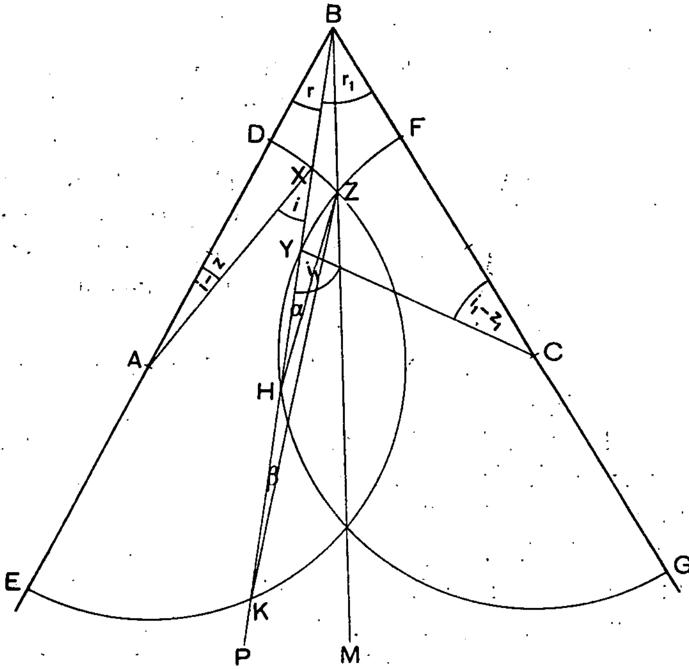


Fig. 2.

(In $\angle$ DAX leze men $i - r$, in $\angle$ FCY $i_1 - r_1$).

Bewijs: boog DX + boog YF =
boog DZ — boog XZ + boog YZ + boog ZF =
boog DZ + boog ZF + boog YZ — boog XZ =
Constante + boog YZ — boog XZ.

Nu is boog YZ $= 2 \angle \alpha$
boog XZ $= 2 \angle \beta$

dus boog YZ — boog XZ $= 2 (\alpha - \beta)$.

Het punt Y ligt altijd verder van B dan X, zoolang X ligt tusschen D en Z, dus K ligt verder van B dan H.

Immers BX . BK = BD . BE = BF . BG = BY . BH

BX . BK = BY . BH

BY > BX

dus BK > BH.

Hieruit volgt

$$\alpha > \beta.$$

Alleen als BP door Z gaat, m.a.w. de bissectrice is van B, is $\alpha = \beta$ dus dan heeft men het minimum van deviatie.

Dan is $r = r_1$ en $i = i$.

Opm.: Als BP het punt Z passeert, wordt BX > BY en dan BH > BK enz.

Opmerkingen: Uit de figuren volgt nog:

1. Welke is de grootste waarde voor r_1?
   Die, waarbij BP raakt aan cirkel C. dan is $i = 90°$, d.w.z. de uittredende straal scheert langs het oppervlak, r_1 is dan de grenshoek.
2. Welke is de kleinste waarde voor r?
   Die, waarbij r_1 maximum is, dus B — grenshoek.
3. Als men den brekenden hoek B constant houdt, maar den brekingsindex der stof laat veranderen, welke is dan de grootste waarde voor n, waarbij nog deviatie mogelijk is?
   De uiterste waarde heeft men, waarbij de twee cirkels A en C elkaar raken.
   Men vindt dan $n = 2$, als $B = 60°$, in het algemeen $n = \text{cosec } {}^1/_2 B$. De straal valt langs het eerste oppervlak op, en treedt langs het tweede oppervlak uit. De deviatie is dan het supplement van B.
4. Wanneer geeft het prisma geen deviatie?
   Als B en n zoodanig zijn, dat de twee cirkels elkaar niet snijden of raken.
5. Het is voor den belangstellende interessant, een dergelijke figuur te beschouwen voor $n < 1$. Bijv. een prisma van lucht in water.

DELEN DOOR NUL

DOOR

Dr. JOH. H. WANSINK.

---

§ 1. Vergelijkingen, waarin de onbekende voorkomt in de noemer van een of meer breuken leveren nog steeds moeilijkheden op bij het algebraonderwijs in de lagere klassen van onze middelbare scholen. Gaat men de leerboeken na, dan ziet men dat dit deel van de leerstof vaak onvolledig of onjuist behandeld wordt. De oorzaak is voor een deel te zoeken in het niet scherp genoeg partij kiezen ten aanzien van de moeilijkheden verbonden aan het *„delen door nul.”*

Enige jaren geleden is deze materie in Euclides aan de orde geweest. Hoewel ik na wat prof. Schuh en de heren Haalmeyer, Schogt en Stuiver hierover hebben uiteengezet [1]), geen nieuwe principiële gezichtspunten heb aan te geven, kom ik toch gaarne op deze dingen terug, voornamelijk om enige vraagstukken, waarbij de „deling door nul” een rol speelt, te behandelen, om enige moeilijkheden, die er in verscholen zitten, nader onder ogen te zien.

Bij de uitbreiding van het getalbegrip in klasse I dient er m.i. nadrukkelijk op gewezen te worden, dat de bewerking $a : b$ in het systeem der meetbare getallen onbeperkt uitvoerbaar is, met deze éne uitzondering, dat de deler b niet nul mag zijn.

De deling $a : b$ met $b = 0$ blijft ongedefiniëerd. [2])

Zolang de leerlingen niet met limietbeschouwingen vertrouwd zijn geraakt, moet hun daarom steeds uitdrukkelijk voorgehouden worden, dat „delingen door nul verboden” zijn. Als ze later de symbolen $\frac{a}{0}$ en $\frac{0}{0}$ toch tegenkomen, is er geen kwestie van een deling door 0, maar van een limietovergang.

$\frac{a}{0}$ betekent dan $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{a}{\delta}$ en $\frac{0}{0}$ betekent dan $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ b \to 0}} \frac{a}{b}$.

---

1) Euclides IV blz. 274, en blz. 190, Euclides VI blz. 84 e.v.
2) Wijdenes, Beknopte Rekenkunde blz. 57.

In dit artikel stel ik me op het standpunt, dat de limieten nog niet aan de orde geweest zijn.

§ 2. *a.* In het leerboek der Algebra van Derksen en de Laive (17de druk, 1933) zie ik in deel I op blz. 147 staan: „*Bepaling.* Deelen door nul wil zeggen, deelen door een oneindig klein getal.

Daaruit volgt dan: $\frac{49}{0} = \infty$."

Op blz. 147 lees ik:

„Zij gegeven de breuk: $\frac{a^2 - 3a}{2a - 6}$.

Geeft men aan a de waarde 3, dan wordt de teller nul en de noemer ook; de breuk krijgt dan de waarde $\frac{0}{0}$. Toch is ze niet onbepaald; want als men teller en noemer in factoren ontbindt, verkrijgt men: $\frac{a(a-3)}{2(a-3)}$, die na vereenvoudiging gelijk wordt aan $\frac{a}{2}$. Stelt men nu $a = 3$, dan wordt de waarde $\frac{3}{2}$ of $1\frac{1}{2}$."

Hier worden dus teller en noemer van de breuk, door $a - 3$, d.i. door 0 gedeeld! Het is bekend dat men op deze wijze tal van ongerijmdheden kan „bewijzen". Beschouwingen als de geciteerde moeten wel verwarring stichten. Wel is waar is:

$$\lim_{a \to 3} \frac{a(a-3)}{2(a-3)} = \lim_{a \to 3} \frac{a}{2},$$

maar van deze limietbeschouwingen wordt, ondanks de aanloop er toe, niet gerept: de leerlingen voor wie de bedoelde paragraaf bestemd is, zijn er trouwens niet rijp voor!

Het aangehaalde voorbeeld kan beschouwd worden als een illustratie van het eerste der drie standpunten, die men volgens Haalmeyer en Schogt ten aanzien van het begrip „oneindig groot" kan innemen. Men kan teneinde deling door nul mogelijk te maken een zogenaamd oneindig groot getal invoeren.

Deze methode is verwerpelijk.

b. Van Thijn geeft in zijn leerboek der Algebra, deel I (5de druk 1931) blz. 108 en 109 een tweetal voorbeelden van vergelijkingen met de onbekende in de noemer; in het éne voorbeeld vermenigvuldigt hij de beide leden met het product der noemers; in

het andere wordt de vergelijking $\frac{3x - 4}{4x - 12} = 2$ vervangen door $3x - 4 = 2\,(4x - 12)$; aangetoond wordt dat de komende vergelijking gelijkwaardig is met de oorspronkelijke.

Dat door de methode van het eerste voorbeeld te veel wortels kunnen worden gevonden, terwijl die van het tweede voorbeeld niet gevolgd mag worden als teller en noemer een factor gemeen hebben, vind ik niet vermeld.

c. W ij d e n e s en B e t h geven op blz. 114 van hun Schoolalgebra (deel I 7de druk 1934) de regel:

„*Vergelijkingen met de onbekende in de noemer herleidt men tot de onvereenvoudigbare gedaante* $\frac{P}{Q} = 0$ *en lost daarna de vergelijking* $P = 0$ *op.*"

Ik apprecieer deze regel in vergelijking met de methodes van *a* en *b* zeer, maar . . . . wie er uit meent te mogen lezen, dat de wortels, die men aldus krijgt ook aan de gegeven vergelijking voldoen, vergist zich.

Dat deze regel in zijn toepassingen tot onjuiste conclusies aanleiding kan geven indien ze niet gecorrigeerd wordt, en in overeenstemming wordt gebracht met de correcte theoretische beschouwingen van blz. 113 van dit leerboek, moge blijken uit de toepassing op de hieronder in § 3 vermelde voorbeelden 3 en 4.

d. W ij d e n e s en B e t h schrijven *niet,* dat de wortels der vergelijking P = 0 inderdaad voldoen. Y n t e m a, D r e w e s en B l o t e n zijn beslister in hun uitspraak; op blz. 68 van deel II van hun Algebra (2de druk 1928) staat:

„Het voorschrift luidt dus:

Herleid de vergelijking op nul; schrijf het eerste lid als één breuk; vereenvoudig deze zooveel mogelijk door te onderzoeken, of één van de factoren van den noemer deelbaar is op den teller; stel daarna den teller gelijk aan nul: *de wortel(s) dezer vergelijking is (zijn) de gevraagde.*"

Deze laatste door mij gecursiveerde zinsnede is onjuist; zie hieronder in § 3 de voorbeelden 3 en 4.

e. In het leerboek der Algebra voor de H.B.S. van d e G r o o t en d e J o n g (1931) vindt men de vergelijkingen met de onbekende in een noemer niet behandeld onder de leerstof van klasse II, maar

eerst aan het einde van het tweede deel, d.i. onder de leerstof van klasse III (blz. 134 e.v.).

Eerst wordt toegelicht, dat, wanneer men beide leden van een vergelijking vermenigvuldigt met een factor, die de onbekende bevat, de komende vergelijking niet gelijkwaardig *behoeft* te zijn aan de gegevene.

Vervolgens worden voorbeelden behandeld, waarin de komende vergelijking wel, en voorbeelden, waarbij deze niet gelijkwaardig is met de oorspronkelijke vergelijking.

Er worden nu twee methodes aangegeven voor de oplossing:

1°. ter verdrijving van alle breuken met een factor die de onbekende bevat vermenigvuldigen, en de gevonden wortels controleren.

2°. de vergelijking herleiden tot de vorm $\frac{V_1(x)}{V_2(x)} = 0$, $V_1(x) = 0$ oplossen en van de gevonden wortels die laten vervallen, die de noemer nul maken.

Als voorbeeld wordt: $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}$

herleid tot: $\frac{2(1 - x)}{x^2 - 1} = 0.$

De teller wordt nul voor $x = 1$. Voor $x = 1$ wordt ook de noemer nul, dus $x = 1$ is géén wortel der gegeven vergelijking.

In deze methode zit géén fout.

De wenk, de komende breuk $\frac{V_1(x)}{V_2(x)}$ eerst zoveel mogelijk te vereenvoudigen, een vrij algemene wenk in leerboeken,[1] die licht tot misverstand kan leiden, is achterwege gebleven.

Slechts blijft de in het boek niet beantwoorde vraag over, of men teller en noemer van $\frac{2(1 - x)}{x^2 - 1}$ niet door $1 - x$ mag delen om daarna de komende vergelijking op te lossen. Op deze vraag zal ik in § 4 nader ingaan.

Met deze uit de aard der zaak zeer onvolledige opsomming hoop ik voldoende te hebben toegelicht, dat de behandeling der aangegeven moeilijkheden in tal van schoolboeken nog min of meer te wensen overlaat.

---

[1]) Zie b.v. nog: Rutgers en Pekelharing, Leerboek der Algebra deel II 1933, derde druk, blz. 28 en van Eek, Algebraïsche opgaven, negende druk, 1931 blz. 265 e.v.

§ 3. *Voorbeelden van vergelijkingen waarbij de onbekende in de noemer van één of meer breuken voorkomt, met oplossingen die aan het slot aan nadere kritiek zullen worden onderworpen.*

1. *Los op:* $\dfrac{5x-13}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x-2}$.

Oplossing. $$\frac{5x-13}{(x-3)\,.\,(x-2)}=\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x-2}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

$$\frac{5x-13}{(x-3)\,.\,(x-2)}-\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-2}=0\quad\ldots\quad(2)$$

$$\frac{5x-13-2(x-2)-3(x-3)}{(x-3)\,.\,(x-2)}=0\,.\quad\ldots\quad(3)$$

$$\frac{0}{(x-3)\,.\,(x-2)}=0.\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door alle waarden van x, met uitzondering van $x_1=3$ en $x_2=2$.

De vergelijking is *bijna-identiek.*[1])

2. *Los op:* $\dfrac{x^2}{x+4}=\dfrac{16}{x+4}+1$.

Oplossing. $$\frac{x^2}{x+4}=\frac{16}{x+4}+1.\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

$$\frac{x^2}{x+4}-\frac{16}{x+4}-1=0\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

$$\frac{x^2-16-(x+4)}{x+4}=0\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

$$\frac{x^2-x-20}{x+4}=0\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

$$\frac{(x+4)(x-5)}{x+4}=0\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

$$x-5=0\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

$$\boxed{x=+5}$$

Tweede oplossing. $$\frac{x^2}{x+4}=\frac{16}{x+4}+1\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

$$\frac{x^2-16}{x+4}=+1\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

$$x-4=+1\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

$$\boxed{x=+5}$$

---

[1]) Zie voor deze term het artikel van S c h o g t over Wiskundige Vaktaal in E u c l i d e s X blz. 60.

3. *Los op:* $\frac{x^2}{x+4} = \frac{16}{x+4} - 8$

Oplossing. $\frac{x^2}{x+4} = \frac{16}{x+4} - 8 \quad \ldots \ldots \quad (1)$

$$\frac{x^2 - 16}{x+4} = -8 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$x - 4 = -8 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\boxed{x = -4}.$$

Deze wortel voldoet niet aan de gegeven vergelijking, omdat $x = -4$ twee noemers nul maakt.

4. *Los op:* $\frac{x}{(x-3)(x+1)} + \frac{19}{(x-3).(x+1).(x+4)} = \frac{10}{(x-3)(x+4)}$.

Oplossing: $\frac{x}{(x-3)(x+1)} + \frac{19}{(x-3).(x+1).(x+4)} = \frac{10}{(x-3)(x+4)} \quad (1)$

$$\frac{x(x+4) + 19 - 10(x+1)}{(x-3)(x+1)(x+4)} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)(x+4)} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\frac{x-3}{(x+1)(x+4)} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$x - 3 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\boxed{x = 3}$$

Deze wortel voldoet niet aan de gegeven vergelijking omdat de noemers voor $x = 3$ nul worden.

5. *Los op:* $\frac{(x-3).(x-4)}{(x-3)(2x+1)} = 1.$

Oplossing. $\frac{(x-3).(x-4)}{(x-3).(2x+1)} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(2x+1)} - 1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{(x-3)(x-4) - (x-3)(2x+1)}{(x-3)(2x+1)} = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{(x-3)(-x-5)}{(x-3)(2x+1)} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\frac{-x-5}{2x+1} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$-x - 5 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\boxed{x = -5}$$

Tweede oplossing. De breuk heeft de waarde 1, „dus" teller en noemer zijn even groot!

We vinden achtereenvolgens:

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(2x+1)} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$(x-3)(x-4) = (x-3)(2x+1) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$(x-3)\{(x-4)-(2x+1)\} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$(x-3)(-x-5) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$x-3 = 0 \text{ òf } -x-5 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\boxed{x_1 = 3} \qquad \boxed{x_2 = -5}$$

De wortel $x_1 = 3$ voldoet *niet* aan de gegeven vergelijking, omdat $x_1 = 3$ de noemer van de breuk nul maakt.

6. *Los op:* $\frac{(x-3).(x-4)}{(x-3).(2x-7)} = 1$

Oplossing volgens de eerste manier van nummer 5.

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(2x-7)} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x-4)-(x-3)(2x-7)}{(x-3)(2x-7)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{(x-3)(-x+3)}{(x-3)(2x-7)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{-x+3}{2x-7} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$-x+3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\boxed{x = 3}$$

Deze wortel voldoet *niet* aan de gegeven vergelijking, omdat $x = 3$ de noemer van de breuk nul maakt.

7. *Los op:* $\frac{1}{x^2-2x-15} = \frac{1}{x^2+5x+6}.$

Oplossing. $\frac{1}{x^2-2x-15} = \frac{1}{x^2+5x+6} \quad \ldots\ldots \quad (1)$

De breuken zijn gelijk, en de tellers zijn gelijk, „dus" de noemers zijn gelijk.

$$x^2-2x-15 = x^2+5x+6$$

$$-7x = 21$$

$$\boxed{x = -3}$$

Deze wortel voldoet niet, omdat $x = -3$ beide noemers nul maakt.

Tweede oplossing. $\dfrac{1}{x^2-2x-15} = \dfrac{1}{x^2+5x+6}$ . . . . (1)

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 0 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{(x+2)-(x-5)}{(x+3)(x-5)(x+2)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\frac{7}{(x+3)(x-5)(x+2)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Deze vergelijking is vals.

8. *Los op.* $\dfrac{1}{(x-3)(x^2+2)} = \dfrac{1}{(x-3)(2x^2+6x+11)}$.

Oplossing (volgens de tweede manier van 7)

$$\frac{1}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{1}{(x-3)\,.\,(2x^2+6x+11)} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{1}{(x-3)(x^2+2)} - \frac{1}{(x-3)(2x^2+6x+11)} = 0 \quad . \; . \quad (2)$$

$$\frac{(2x^2+6x+11)-(x^2+2)}{(x-3)(x^2+2)(2x^2+6x+11)} = 0 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

$$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x^2+2)(2x^2+6x+11)} = 0 \quad . \; . \; . \quad (4)$$

$$\frac{x-3}{(x^2+2)(2x^2+6x+11)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$x-3=0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\boxed{x=3}\,.$$

Deze wortel voldoet *niet*, omdat $x = 3$ beide noemers nul maakt.

9. Bepaal A en B zó, dat men voor „alle waarden van x" [1]) heeft:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Oplossing. $\dfrac{3x+5}{(x+1)\,.\,(x+2)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2}$ . . . . . . (1)

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\equiv \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

---

[1]) Zie W i j d e n e s en B e t h, Nieuwe Schoolalgebra II (6de druk 1934) blz. 51 opgave 6.

De beide leden uit (2) zijn „bijna-identiek", als de volgende identiteit geldt:

$$3x+5 \equiv (A+B) \,.\, x+(2A+B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=5 \end{cases} \quad \boxed{A=2, \quad B=1}.$$

Opmerking. Voor A = 2 en B = 1 zijn de beide leden der vergelijking „voor alle waarden van x" even groot, . . . met uitzondering van de waarden $x = -1$ en $x = -2$.

Tweede oplossing. $$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$3x+5 \equiv A(x+2)+B(x+1) \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor $x = -1$ vindt men A = 2.

Voor $x = -2$ vindt men B = 1.

Derde oplossing. Als de tweede, maar men neemt voor x twee willekeurige van — 1 en — 2 verschillende waarden, b.v. $x = 0$ en $x = 1$.

Men vindt: $\begin{cases} 5 = 2A+B \\ 8 = 3A+2B \end{cases}$ waaruit: A = 2 en B = 1.

Opmerkingen. In de oplossingen van de nummers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 kwamen we tot wortels, die niet bleken te voldoen. We moeten dus gedurende de oplossing ergens een vergelijking door een niet-aequivalente hebben vervangen.

Waar zitten de gemaakte fouten?

Bedenken we, dat een wortel $x = a$ van de vergelijking $f_1(x) = f_2(x)$ een getal is, waarvoor $f_1(a) = f_2(a)$, dan volgt uit het feit, dat een quotient zinloos is als de deler nul is, dat een waarde van x, die in een gebroken rationale vergelijking een noemer nul maakt, géén wortel van die vergelijking kan zijn.

Bedenken we voorts, dat het gelijkteken in de vergelijking $f_1(x) = f_2(x)$ een van de „gewone" betekenis afwijkende betekenis heeft [1]), doordat de vergelijking een opgave is waarbij gevraagd wordt die waarden van de x-te bepalen, waarvoor $f_1(x)$ en $f_2(x)$ dezelfde waarde aannemen, zodat slechts voor *die* waarden van x het gelijkteken zijn „gewone" betekenis heeft, dan is het duidelijk, dat het vereenvoudigen van een breuk door $x - a$, als $x = a$ een

---

[1]) Euclides X blz. 58; artikel van S c h o g t.

wortel der vergelijking blijkt, een ongeoorloofde handeling is. Immers, *er wordt dan gedeeld door nul* (zie verder § 4).

In voorbeeld 3 blijkt nu de fout gemaakt te zijn bij de overgang van (2) op (3); teller en noemer zijn namelijk door $x + 4$ gedeeld, maar dit is slechts geoorloofd als $x + 4 \neq 0$ is, en hier vinden we de wortel $x = -4$, zodat $x + 4 = 0$.

We zouden als volgt kunnen redeneren. We hebben de vergelijking $\frac{x^2 - 16}{x+4} = -8$.

Er zijn nu twee mogelijkheden: *a)* $x \neq -4$; b) $x = -4$.

In geval *a*) mogen we teller en noemer door $x + 4$ delen; we vinden de aequivalente vergelijking $x - 4 = -8$ dus $x = -4$.

Deze conclusie is in strijd met de onderstelling $x \neq -4$, zodat we in het eerste geval géén wortel vinden.

In geval *b*) maakt $x = -4$ een noemer nul, zodat $x = -4$ géén wortel kan zijn.

De vergelijking $\frac{x^2 - 16}{x+4} = -8$ heeft dus géén wortels.

In voorbeeld 4 zijn de vergelijkingen (3) en (4) niet aequivalent. Men mag teller en noemer slechts door $x - 3$ delen, als de deler niet nul is, dus niet voor $x = 3$, welke waarde juist als wortel gevonden wordt.

In voorbeeld 8 zijn de vergelijkingen (4) en (5) niet aequivalent.

In voorbeeld 5 (tweede oplossing) zijn de vergelijkingen (1) en (2) niet aequivalent. De methode is die van v a n T h ij n ter aangeduider plaatse, die boven werd afgekeurd.

Men kan de fout vermijden door (1) te vervangen door $\frac{x-4}{2x+1} = 1$ en dan toch de gewraakte methode toe te passen. We krijgen dan een wortel die voldoet. Maar in voorbeeld 6 gaat dit weer mis!

Hier is de overgang van (3) op (4) niet geoorloofd, omdat men de wortel $x = 3$ vindt, die de factor waardoor we teller en noemer van (3) gedeeld hebben, nul maakt!

In voorbeeld 7 (eerste oplossing) is een fout gemaakt die in deel I van de Schoolalgebra van W ij d e n e s en B e t h terecht is gesignaleerd (blz. 115).

Past men de door hen genoemde „ware oplossing" echter toe op

voorbeeld 8 dan komt men tot de wortel $x = 3$ die niet voldoet, doordat de vergelijkingen (4) en (5) niet-aequivalent zijn.

In voorbeeld 9 zou het antwoord op de vraag zoals ze gesteld was, moeten luiden: zulke waarden van A en B zijn er niet.

De beide leden waren „bijna-identiek" voor $A = 2$ en $B = 1$. In de tweede oplossing waren (1) en (2) niet aequivalent. En men bepaalt A en B door voor x juist die waarden te nemen, waarvoor de identiteit in de opgave niet behoeft te gelden! Dit laatste bezwaar is in de derde oplossing vermeden.

§ 4. De hierna te bewijzen stelling geeft ons uitsluitsel op de vraag, wanneer het in één rationale gebroken vergelijking in x geoorloofd is, teller en noemer van een breuk door $x - a$ te delen.

Stelling. Als $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$ veeltermen in x zijn hebben de vergelijkingen

$$\frac{(x-a)\,.\,V_1(x)}{(x-a)\,.\,V_2(x)} + V_3(x) = 0 \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

en

$$\frac{V_1(x)}{V_2(x)} + V_3(x) = 0 \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

dan en dan alléén dezelfde wortels als $x = a$ géén wortel is van de tweede vergelijking.

Bewijs. Voor het begrip „wortel" zie de opmerkingen van § 3 (blz. 234).

We bewijzen:

a) Als $x_1 = a$ géén wortel is van II, zijn I en II aequivalent (d.w.z. dan hebben I en II dezelfde wortels).

b) Als $x_1 = a$ wel een wortel is van II, zijn I en II niet aequivalent.

ad a) Als $x = x_1$ een wortel is van I, dan is volgens de definitie van wortel $\dfrac{(x_1-a)\,.\,V_1(x_1)}{(x_1-a)\,.\,V_2(x_1)} + V_3\,(x_1) = 0$. Voorts is $x_1 - a \neq 0$, anders was de breuk zinloos. Men mag teller en noemer door $x_1 - a$ deelen; men vindt: $\dfrac{V_1(x_1)}{V_2(x_1)} + V_3\,(x_1) = 0$, zodat x_1 een wortel is van II.

Als $x = x_1$ een wortel is van II, *èn* $x_1 \neq a$, dan hebben we: $\dfrac{V_1(x_1)}{V_2(x_1)} + V_3\,(x_1) = 0$ en $x_1 - a \neq 0$, dus ook $\dfrac{(x_1-a)\,.\,V_1(x_1)}{(x_1-a)\,.\,V_2(x_1)} + V_3\,(x_1) = 0$, zodat $x = x_1$ een wortel is van I.

De vergelijkingen I en II zijn dus aequivalent.

ad b) Als $x = x_1 = a$ een wortel is van II, dan is $x = x_1 = a$ stellig géén wortel van I, omdat voor deze waarde van x de breuk in I van de vorm $\frac{0}{0}$ wordt en dus zinloos is; de vergelijkingen I en II zijn dus stellig *niet*-aequivalent.

§ 5. Dat men ook bij de *grafieken* verwante moeilijkheden ontmoet, moge uit de volgende voorbeelden van krommen, waar één of meer punten uitgelicht zijn, blijken.

1. *Teken* de grafische voorstelling van de functies:

$$y = x + 3 \text{ en } y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Oplossing. Voor $y = x + 3$ vinden we de rechte lijn uit fig. (1).

Voor $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ mogen we, als $x \neq 3$ is, schrijven: $y = x + 3$.

Als $x = 3$ is, is $y = \frac{0}{0}$, dus voor y wordt géén waarde gevonden.

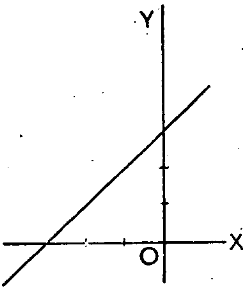


Fig. 1.

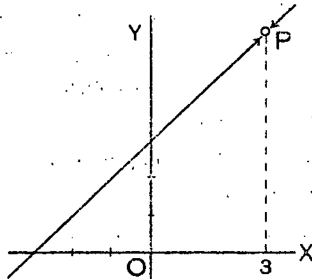


Fig. 2.

We vinden dus voor $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ de rechte $y = x + 3$ met uitzondering van het punt $(+ 3, + 6)$; zie fig. (2).

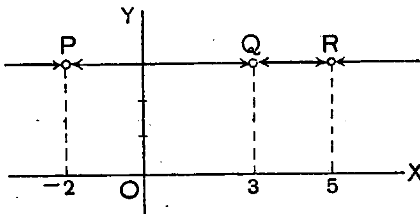


Fig. 3.

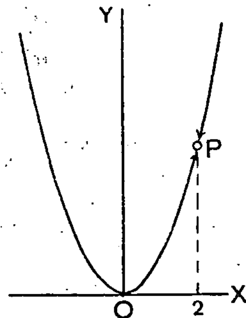


Fig. 4.

2. *Teken* de grafische voorstelling van:

$$y = \frac{3(x+2)(x-3)(x-5)}{(x+2)(x-3)(x-5)}.$$

Opl. Zie fig. (3). We vinden de rechte $y = 3$, met uitzondering van de punten, waarvan de abscis -2, $+3$ en $+5$ is.

3. *Teken* de grafische voorstelling van:

$$y = \frac{x^2(x-2)}{x-2}.$$

Opl. Zie fig. (4). We vinden de parabool $y = x^2$ met uitzondering van het punt $(+2, +4)$.

§ 6. Is met deze uiteenzetting het definitieve standpunt aangegeven, dat men ten aanzien van de deling door nul moet innemen?

Naar mijn mening: ja! als men zich uitdrukkelijk beperkt tot wat er over deze materie is te zeggen vóór een grondige behandeling van het limietbegrip.

Is het limietbegrip echter aan de orde geweest, dan kan men het begrip „oneigenlijke waarde", door den heer Stuiver in Euclides VI blz. 274 e.v. ontwikkeld, invoeren. Er kan dan van menige vergelijking een wortel „gered" worden, die bij de geschetste behandeling moest vervallen, terwijl de lacunes in de grafieken van § 5 gemakkelijk kunnen worden aangevuld.

In dit verband verwijs ik naar de opvattingen van den heer Verrijp in Euclides VI blz. 152 e.v.

Ik ga op deze eventuele voortzetting echter niet in, omdat ik mij uitdrukkelijk wens te beperken tot een behandeling van deze moeilijkheden vóór invoering van het limietbegrip, een behandeling die m.i. in géén geval achterwege kan blijven, en waarbij een overijld beroep op limietbeschouwingen gemakkelijk verwarring kan stichten.

BOEKBESPREKING.

Dr. H. J. E. BETH, *Meetkunde van de Ruimte.* Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1935. 180 bladzijden, prijs geb. *f* 2.90.

Dit leerboek der stereometrie voor het middelbaar onderwijs onderscheidt zich in twee opzichten sterk van zijne voorgangers: ten eerste zijn stereometrie en beschrijvende meetkunde (orthogonale parallelprojectie) samen behandeld en gedeeltelijk versmolten, ten tweede is de behandeling der stereometrie voorafgegaan door eene inleiding, waarin in het kort de beginselen der vlakke meetkunde worden herhaald en zoo noodig aangevuld, en waarin (evenals trouwens in de eigenlijke stereometrie) congruentiebeschouwingen met behulp van het begrip „beweging" worden behandeld.

Een blik op de inhoudsopgave doet den lezer zien, dat de gebruikelijke volgorde der onderwerpen is opgeofferd ten voordeele van de gelijktijdige behandeling van stereometrie en beschrijvende meetkunde; daardoor zijn onderwerpen, die verwantschap vertoonen, dichter bij elkaar komen te staan. Nadat evenwijdigheid en loodrechte stand van lijn en vlak en van vlakken onderling zijn behandeld, wordt een begin gemaakt met de beschrijvende meetkunde; dan komt het begrip afstand aan de beurt, met de daarmee samenhangende onderwerpen bol en cylinder alsmede de oppervlakteberekeningen voor prisma's en cylinders, vervolgens het hoekbegrip, gevolgd door kegel en pyramide, telkens begeleid door constructies in orthogonale parallelprojectie. Dan volgen de bolmeetkunde, de drievlakshoeken en de netwerkconstructies, ten slotte congruentie, symmetrie en gelijkvormigheid, regelmatige veelvlakken, en, als laatste hoofdstuk van het geheele boek (afgezien van de verzamelingen herhalingsvraagstukken) de inhouden, zoowel van veelvlakken als van door gebogen oppervlakken begrensde lichamen.

Wat nu de behandeling der afzonderlijke onderwerpen betreft, deze is gekenmerkt door een veelvuldig gebruik van het bewegingsbegrip, terwijl overal, waar dit mogelijk bleek, van het begrip affiniteit is gebruik gemaakt; veel sterker, dan dit in de gebruikelijke boeken geschiedt, worden dus de meetkundige verwantschappen op den voorgrond gebracht.

De behandeling is helder en duidelijk; met bijzondere ingenomenheid maak ik melding van 's schrijvers pogingen, om de exactheid te bevorderen door wijziging en uitbreiding van de stereometrische terminologie, b.v. door invoering van het woord „vlakdeel" naar analogie van „lijnstuk"; tot eene afdoende verbetering van de romme-

lige stereometrische nomenclatuur zal het vooreerst wel niet komen.

Het inleidende hoofdstuk kan mij maar matig bevredigen. De bedoeling zal wel geweest zijn, den leerlingen eenig inzicht te geven in een axiomatischen opbouw der meetkunde, en hun helder voor oogen te stellen, welke rollen daarbij definities en axiomata spelen, zonder dat gestreefd werd naar een uit wetenschapplijk oogpunt onberispelijk geheel. Maar dit doel lijkt mij niet bereikt. Het maakt den indruk, dat de schrijver het als een vervulbaren eisch beschouwt, dat alle begrippen, die in de meetkunde gebruikt worden, gedefinieerd zijn, en dat hij het toelaten van ongedefinieerde begrippen beschouwt als eene concessie van didaktischen aard. Misschien staat daarmede in verband, dat hij vergeet, de eigenschappen zijner ongedefinieerd blijvende begrippen door axiomata vast te leggen; dit heeft ten gevolge dat in het bijzonder het voor zijne behandelingswijze zoo fundamenteele bewegingsbegrip geheel vaag blijft, en dat de bewijzen, waarin het gebruikt wordt, schijnbewijzen zijn, net als de traditioneele superpositiebewijzen van onzen planimetrischen leergang. Enkele opmerkingen zijn dan ook duister, b.v. die in § 3, opmerking II: Als een ellips in zich zelf beweegt, dan ondergaat hij voortdurend verandering. — Eene minder ernstige vergissing is het, dat twee figuren direct gelijkvormig genoemd worden, als eene beweging van het vlak in zich zelf de eene figuur kan doen overgaan in eene productfiguur van de andere, wanneer eerst vermenigvuldigingen met een negatieven factor zijn toegelaten.

Ik hoop, dat dit boek door de voorstanders der bewegingsmeetkunde zal worden gebruikt, en dat een herdruk gelegenheid zal geven tot revisie van het inleidende hoofdstuk. J. H. S.

OVER NIET TOT HET EINDE, EN DAARDOOR FOUTIEF, OPGELOSTE MECHANICA-VRAAGSTUKKEN.

Tot deze vraagstukken zal voor ongeveer alle candidaten wel de tweede opgave van het eindexamen 1934 behoord hebben. Zij zullen als antwoord (op de eerste vraag) gegeven hebben $w_0 = fv_0$, zonder te onderzoeken of het glijdende punt op het bedoelde tijdstip wel in *neer*waartse beweging is. Dit blijkt inderdaad *niet* het geval te zijn voor $\text{tg}\,\alpha < \frac{1}{2}f$, zodat voor dit geval het vraagstuk *on*mogelijk is. Ik maak de opmerking, omdat ik geloof, dat de bespreking van dit punt wel instructief is.

Een ander voorbeeld vinden we in de eerste opgave van 1908, waar men twee waarden voor de gevraagde wrijvingscoëfficiënt vindt. Bij het noodzakelijke nader onderzoek zou blijken, dat voor een van deze waarden één van de normale drukkingen negatief zou uitvallen, hierdoor moet deze oplossing vervallen.

Amersfoort. H. J. E. Beth.

COMPOSITIO MATHEMATICA

QUOD PERIODICUM INTERNATIONALE
EDUNT

Ieder deel zal in drie afleveringen verschijnen en 30 vel (480 blz.) bevatten; de prijs per deel bedraagt 20 Gulden.
De inschrijving kan geschieden door bemiddeling van elke boekhandel of direct door den uitgever P. NOORDHOFF, Groningen.

VOLUMEN 2

FASCICULUS 1

INDEX

Eduard Čech, Sur la connexité locale d'ordre supérieur 1
Alexander Ostrowski, Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I 26
Heinz Hopf, Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven . . 50
T. Wazewski, Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues . 63
Stefan Cohn-Vossen, Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen . . 69
Hans Freudenthal, Die Hopfsche Gruppen 134
Hans Freudenthal, Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen 163

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA